

Министерство сельского хозяйства РФ  
ФГБОУ ВПО  
КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной информатики  
*Кафедра компьютерных технологий и систем*

**Т.А. Анищик**

***Практикум  
по математическим и  
логическим основам  
информатики***

*Учебно-методическое пособие  
для студентов-бакалавров  
факультета прикладной информатики*

Краснодар  
2013

**УДК 004.9**  
**ББК 32.97**  
**Л88**

**Анищик Т.А.**

Л88                      Практикум по математическим и логическим основам информатики: учебно-методическое пособие /Т.А. Анищик. – Краснодар: КубГАУ, 2013.–108 с.

Учебно-методическое пособие разработано с учетом требований Государственного образовательного стандарта базового высшего профессионального образования и рассмотрено на заседании кафедры компьютерных технологий и систем КГАУ (протокол №11 от 1 июля 2013г.)

Практикум содержит упражнения и задания по всем основным темам дисциплины «Математические и логические основы информатики» и должен помочь в практическом освоении изучаемой дисциплины и может быть полезен как абитуриентам, так и студентам, продолжающим углубленно изучать разделы курса математической логики и информатики.

Приведенные упражнения и задания могут быть использованы при проведении лабораторных и практических занятий, как для аудиторного, так и домашнего контроля усвоенных знаний.

Приношу глубокую благодарность своим коллегам – сотрудникам кафедры компьютерных технологий и систем КГАУ за советы и поддержку, проявленную при написании книги.

**УДК 004.9**  
**ББК 32.97**  
**Л88**

© Т.А. Анищик, 2013

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Кубанский государственный аграрный университет», 2013

## Содержание

	стр
Глава 1. Математические основы информатики.....	4
Тема 1. Позиционные традиционные системы счисления.....	4
Тема 2. Позиционные нетрадиционные системы счисления.....	12
Тема 3. Арифметические операции над числами в позиционных системах счисления.....	15
Тема 4. Представление целых чисел в памяти ПК.....	21
Тема 5. Представление дробных чисел в памяти ПК.....	26
Тема 6. Представление алфавитно-цифровых и графических данных в памяти ПК .....	30
Контрольные вопросы к главе 1.....	33
 Глава 2. Множества, отношения и отображения.....	 34
Тема 1. Элементы теории множеств.....	34
Тема 2. Равносильные преобразования множеств.....	43
Тема 3. Отношения и отображения множеств.....	47
Контрольные вопросы к главе 2.....	54
 Глава 3. Логические основы информатики.....	 55
Тема 1. Элементы логики высказываний.....	55
Тема 2. Равносильные преобразования логических формул.....	63
Тема 3. Логические функции. Суперпозиции функций.....	69
Тема 4. Формы представления логических функций.....	77
Тема 5. Полнота логических функций.....	84
Тема 6. Минимизация логических функций.....	90
Тема 7. Применение алгебры логики.....	94
Контрольные вопросы к главе 3.....	104
 Приложение 1. Таблица кодов ASCII.....	 105
Приложение 2. Альтернативная таблица.....	106
 Рекомендуемая литература.....	 107

# Глава 1. Математические основы информатики

## Тема 1. Позиционные традиционные системы счисления

### Перевод чисел из недесятичных систем счисления в десятичную

Система счисления называется *позиционной*, если значение каждого знака определяется ее местом (позицией) в числе. Позиционную систему счисления называют *традиционной*, если ее базис<sup>1</sup> образуют члены геометрической прогрессии, а значения знаков есть целые неотрицательные числа. Например, базисы двоичной ( $D_2$ ), восьмеричной ( $D_8$ ), шестнадцатеричной ( $D_{16}$ ) и десятичной ( $D_{10}$ ) систем счисления образуют геометрические прогрессии со знаменателями ( $P$ ): 2, 8, 16 и 10 соответственно.

Знаменатель  $P$  геометрической прогрессии, члены которой образуют базис традиционной системы счисления, называется *основанием* этой системы счисления.

Традиционные системы счисления с основанием  $P$  называют *P-ичными*. Базис  $P$ -ичных систем совпадает с *алфавитом*<sup>2</sup>, а *размерность* алфавита равна основанию системы счисления.

Существуют две формы записи чисел в  $P$ -ичных системах:

- в *свернутой форме* в виде последовательности знаков

$D = x_{n-1}x_{n-2} \dots x_2x_1x_0x_{-1}x_{-2} \dots x_{-m}$  из базиса системы счисления;

- в *развернутой форме* (полиномиальное представление):

$$D = x_{n-1} \cdot P^{n-1} + x_{n-2} \cdot P^{n-2} + \dots + x_1 \cdot P^1 + x_0 \cdot P^0 + x_{-1} \cdot P^{-1} + \dots + x_{-m} \cdot P^{-m}$$

где  $P$  – основание системы счисления,

$x_i$  – символ базиса данной системы счисления,

$n$  – число разрядов целой части числа,

$m$  – число разрядов дробной части числа.

**Правило:** для перевода чисел из недесятичных систем счисления в десятичную, необходимо представить число в развернутой форме, заметить во всех слагаемых символы базиса системы и само основание их десятичными эквивалентами и вычислить сумму значений всех слагаемых. Все вычисления выполняются по правилам умножения, сложения и деления в десятичной системе счисления.

<sup>1</sup> Базис – это набор самих знаков для записи числовых величин.

<sup>2</sup> Алфавит – это совокупность символов для записи чисел. Количество знаков алфавита называют его *размерностью*.

### Примеры выполнения заданий

1. Переведите числа в десятичную систему счисления:

$$101,11_2 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 5 + 0,5 + 0,25 = 5,75_{10}$$

$$A,C4_{16} = 10 \cdot 16^0 + 12 \cdot 16^{-1} + 4 \cdot 16^{-2} = 10 + 0,75 + 0,0156 = 10,7656_{10}$$

$$0,342_6 = 0 \cdot 6^0 + 3 \cdot 6^{-1} + 4 \cdot 6^{-2} + 2 \cdot 6^{-3} = 0,5 + 0,1 + 0,009 = 0,609_{10}$$

2. Определите систему счисления, в которой произведены следующие вычисления:  $98 + 89 = 121$

Решение: пусть  $x$  - основание искомой системы счисления, тогда:

$$98_x = 8 \cdot x^0 + 9 \cdot x^1 = 8 + 9x \qquad 89_x = 9 \cdot x^0 + 8 \cdot x^1 = 9 + 8x$$

$$121_x = 1 \cdot x^0 + 2 \cdot x^1 + 1 \cdot x^2 = 1 + 2x + x^2$$

подставим полученные полиномы в равенство и упростим:

$$x^2 - 15x - 16 = 0 \quad x_1 = 16, x_2 = -1 \quad \text{т.к. } x_2 < 0, \text{ то } x = 16$$

Ответ: 16-ричная система счисления.

### Перевод чисел из десятичной системы счисления в недесятичные

Правило: для перевода целого числа из десятичной системы счисления в недесятичную систему счисления *методом последовательного деления* углом необходимо последовательно делить заданное число и целые его части на новое основание системы счисления до тех пор, пока результат не станет меньше основания новой системы счисления. Полученные остатки от деления, представленные цифрами из новой системы счисления, запишите в виде числа, начиная с последнего частного числа.

Правило: для перевода целого числа из десятичной системы счисления в недесятичную систему счисления *методом разложения по степени* необходимо каждый раз вычитать из остатка (первый раз из числа) число, равное ближайшей степени нового основания. Выписать новое число путем записи коэффициентов при степенях, заменяя их эквивалентами по таблице 1. У пропущенных степеней коэффициенты равны нулю.

Для перевода дробного числа из десятичной системы счисления в недесятичную систему счисления необходимо отдельно перевести его целую часть, затем дробную и объединить полученные результаты.

Правило: чтобы перевести дробную часть числа следует последовательно умножать дробную часть числа (или произведений в дальнейшем) на основание новой системы счисления до тех пор, пока не выполнится одно из условий, когда дробная часть произведения:

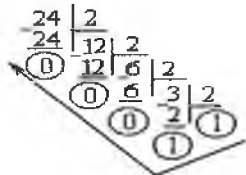
1) станет равной нулю; 2) будет обнаружен период дроби. Период дроби выписывается в круглых скобках; 3) будет получено требуемое

по условию количество разрядов. Запись результата через знак приближения  $\approx$ .

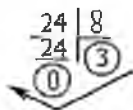
Число записать как целые части произведений сверху вниз, не учитывая ноль целых.

### Примеры выполнения заданий

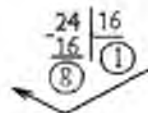
1. Переведите  $D_{10} \rightarrow D_2, D_8, D_{16}$  целое число  $24_{10}$  методом последовательного деления углом:



$$24_{10} = 11000_2$$



$$24_{10} = 30_8$$



$$24_{10} = 18_{16}$$

2. Переведите  $D_{10} \rightarrow D_2, D_8, D_{16}$  целое число  $27_{10}$  методом разложения по степеням:

$$27_{10} = 16 + 8 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 11011_2$$

$$27_{10} = 24 + 3 = 3 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 33_8$$

$$27_{10} = 16 + 11 = 1 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = 1B_{16}$$

Числа, большие 9, в шестнадцатеричной системе счисления заменяют буквами в следующем порядке: 10– А, 11– В, 12– С, 13– D, 14– Е, 15– F.

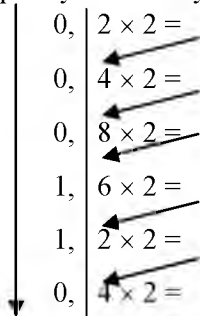
3. Переведите  $D_{10} \rightarrow D_2, D_8, D_{16}$  дробное число  $19,2_{10}$

Для перевода целой части воспользуемся методом разложения по степеням:  $19_{10} = 16 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 10011_2$

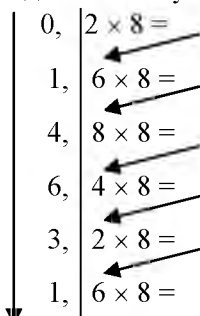
$$19_{10} = 16 + 3 = 2 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 23_8$$

$$19_{10} = 16 + 3 = 1 \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 = 13_{16}$$

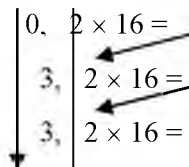
Дробную часть будем последовательно умножать на новое основание:



$$19,2_{10} = 10011, (0011)_2$$



$$19,2_{10} = 23, (1463)_8$$



$$19,2_{10} = 13, (3)_{16}$$

### Специальные приемы перевода

**Правило:** при переводе  $D_2 \rightarrow D_8$  двоичную запись числа разделяют по три двоичных разряда (триада) вправо и влево от запятой (в случае необходимости триады можно дополнить незначащими нулями) и заменяют каждую триаду соответствующей восьмеричной цифрой (см. табл.1).

Обратный переход осуществляется также просто: каждую цифру восьмеричной записи заменяют ее двоичным представлением.

**Правило:** переход  $D_2 \rightarrow D_{16}$ , (и обратно) также прост, как  $D_2 \rightarrow D_8$ , только двоичную запись числа разделяют теперь по четыре двоичных разряда (тетрада) вправо и влево от запятой. Тетрады двоичных цифр заменяют на шестнадцатеричную запись.

Таблица 1. Десятичные и двоичные эквиваленты

Десятичный эквивалент	Двоичные эквиваленты	
	$D_8 - D_2$	$D_{16} - D_2$
0	0 - 000	0 - 0000
1	1 - 001	1 - 0001
2	2 - 010	2 - 0010
3	3 - 011	3 - 0011
4	4 - 100	4 - 0100
5	5 - 101	5 - 0101
6	6 - 110	6 - 0110
7	7 - 111	7 - 0111
8		8 - 1000
9		9 - 1001
10		A - 1010
11		B - 1011
12		C - 1100
13		D - 1101
14		E - 1110
15		F - 1111

### Примеры выполнения заданий

1. Переведите  $D_2 \rightarrow D_8, D_{16}$  число:

$\underbrace{10101001001}_2, \underbrace{100100001}_4, \underbrace{10101001001}_5, \underbrace{100100001}_9, 908_{16}$

2. Переведите  $D_8 \rightarrow D_2, D_{16}$  числа:

$\begin{array}{ccccccc} 5 & 2 & 1 & 5 & , & 1 & 4 & 1 \\ \hline 110010001101,001100001_2 \end{array}$

$\begin{array}{ccccccc} 1 & 6 & 7 & , & 5 & 9 & \\ \hline 00111011,101100_2 \end{array}$

3. Переведите  $D_{16} \rightarrow D_2$  число:

$\begin{array}{ccccccc} A & B & F & , & D & 4 & \\ \hline 101001101111,11010100_2 \end{array}$

Более длительные цепочки преобразований следует выполнить при переводах  $D_8 \rightarrow D_{16}$  и  $D_{16} \rightarrow D_8$ . Для этого необходимо выполнить ряд переводов: в первом случае  $D_8 \rightarrow D_2$ , затем  $D_2 \rightarrow D_{16}$ ; во втором случае  $D_{16} \rightarrow D_2$ , затем  $D_2 \rightarrow D_8$ . Возможны переводы и через десятичную систему счисления, но это осуществить гораздо сложнее.

### Задания для самостоятельного выполнения

1.1. Переведите целые числа в десятичную систему счисления:

- |    |                   |              |                 |               |                  |
|----|-------------------|--------------|-----------------|---------------|------------------|
| 0) | a) $11100101_2$ ; | b) $543_8$ ; | c) $1AB_{16}$ ; | d) $1060_7$ ; | e) $201,132_4$ ; |
| 1) | a) $11001010_2$ ; | b) $612_8$ ; | c) $6EA_{16}$ ; | d) $1452_7$ ; | e) $314,204_5$ ; |
| 2) | a) $10111101_2$ ; | b) $437_8$ ; | c) $2BF_{16}$ ; | d) $3206_7$ ; | e) $120,212_3$ ; |
| 3) | a) $10111110_2$ ; | b) $235_8$ ; | c) $4FD_{16}$ ; | d) $6004_7$ ; | e) $513,402_6$ ; |
| 4) | a) $10011101_2$ ; | b) $177_8$ ; | c) $7DC_{16}$ ; | d) $4103_7$ ; | e) $718,012_9$ ; |
| 5) | a) $10101100_2$ ; | b) $562_8$ ; | c) $9AD_{16}$ ; | d) $1025_7$ ; | e) $313,201_4$ ; |
| 6) | a) $10110111_2$ ; | b) $273_8$ ; | c) $3CF_{16}$ ; | d) $5143_7$ ; | e) $432,012_5$ ; |
| 7) | a) $11101001_2$ ; | b) $544_8$ ; | c) $1CD_{16}$ ; | d) $5102_7$ ; | e) $315,104_6$ ; |
| 8) | a) $10101001_2$ ; | b) $332_8$ ; | c) $5AF_{16}$ ; | d) $4506_7$ ; | e) $180,524_9$ ; |
| 9) | a) $10011001_2$ ; | b) $465_8$ ; | c) $8CB_{16}$ ; | d) $3041_7$ ; | e) $211,021_3$ ; |

1.2. Переведите дробные числа в десятичную систему счисления:

- |    |                    |                 |                    |                 |
|----|--------------------|-----------------|--------------------|-----------------|
| 0) | a) $1110,0101_2$ ; | b) $503,25_8$ ; | c) $2B0,5D_{16}$ ; | d) $24,327_9$ ; |
| 1) | a) $1100,1010_2$ ; | b) $106,34_8$ ; | c) $1E7,8E_{16}$ ; | d) $67,012_9$ ; |
| 2) | a) $1011,1111_2$ ; | b) $407,45_8$ ; | c) $4A3,4F_{16}$ ; | d) $81,501_9$ ; |
| 3) | a) $1010,1110_2$ ; | b) $205,12_8$ ; | c) $1F3,7D_{16}$ ; | d) $45,865_9$ ; |
| 4) | a) $1001,1101_2$ ; | b) $107,72_8$ ; | c) $7D8,1A_{16}$ ; | d) $26,812_9$ ; |
| 5) | a) $1011,1001_2$ ; | b) $502,24_8$ ; | c) $8B9,3C_{16}$ ; | d) $17,324_9$ ; |
| 6) | a) $1111,0111_2$ ; | b) $407,36_8$ ; | c) $3C1,1F_{16}$ ; | d) $25,136_9$ ; |
| 7) | a) $1110,1001_2$ ; | b) $504,75_8$ ; | c) $3F0,4B_{16}$ ; | d) $54,623_9$ ; |



8) а)  $1010,1101_2$ ; б)  $603,32_8$ ; в)  $5F4,0D_{16}$ ; д)  $67,168_9$ ;

9) а)  $1000,0101_2$ ; б)  $705,24_8$ ; в)  $6B9,2E_{16}$ ; д)  $14,703_9$ .

**1.3. Переведите целые десятичные числа в  $D_2, D_8, D_{16}$  методом последовательного деления углом:**

0) а) 71; б) 53; в) 209; д) 110; е) 340; ж) 543;

1) а) 90; б) 62; в) 411; д) 101; е) 198; ж) 612;

2) а) 56; б) 43; в) 204; д) 111; е) 405; ж) 537;

3) а) 67; б) 52; в) 401; д) 120; е) 351; ж) 235;

4) а) 84; б) 77; в) 307; д) 105; е) 700; ж) 377;

5) а) 69; б) 56; в) 209; д) 113; е) 221; ж) 562;

6) а) 80; б) 73; в) 331; д) 108; е) 742; ж) 273;

7) а) 76; б) 54; в) 306; д) 112; е) 409; ж) 544;

8) а) 73; б) 32; в) 502; д) 107; е) 287; ж) 332;

9) а) 62; б) 46; в) 308; д) 114; е) 535; ж) 465.

**1.4. Переведите целые десятичные числа в  $D_2, D_8, D_{16}$  методом разложения по степеням:**

0) а) 23; б) 60; в) 81; д) 415; е) 216; ж) 307;

1) а) 28; б) 35; в) 79; д) 327; е) 204; ж) 419;

2) а) 25; б) 50; в) 62; д) 508; е) 351; ж) 413;

3) а) 54; б) 40; в) 59; д) 546; е) 295; ж) 310;

4) а) 27; б) 75; в) 66; д) 421; е) 302; ж) 469;

5) а) 64; б) 45; в) 39; д) 402; е) 261; ж) 324;

6) а) 38; б) 70; в) 46; д) 476; е) 249; ж) 307;

7) а) 41; б) 55; в) 82; д) 457; е) 273; ж) 304;

8) а) 29; б) 90; в) 48; д) 548; е) 262; ж) 401;

9) а) 37; б) 80; в) 74; д) 503; е) 319; ж) 467.

**1.5. Переведите дробные десятичные числа в  $D_2, D_8, D_{16}$ :**

0) а) 60,4; б) 14,15; в) 27,26; д) 201,51; е) 207,02;

1) а) 29,1; б) 15,14; в) 28,39; д) 310,42; е) 801,04;

2) а) 56,8; б) 13,12; в) 32,26; д) 410,23; е) 403,03;

3) а) 70,2; б) 12,13; в) 51,34; д) 504,46; е) 305,05;

4) а) 35,1; б) 16,14; в) 28,45; д) 602,24; е) 602,09;

5) а) 45,4; б) 13,11; в) 90,27; д) 803,32; е) 304,01;

6) а) 57,8; б) 11,16; в) 80,25; д) 710,29; е) 605,07;

7) а) 36,9; б) 17,19; в) 42,38; д) 901,35; е) 704,08;

8) а) 81,2; б) 18,17; в) 37,31; д) 240,41; е) 608,06;

- 9) а) 45,6; б) 19,18; в) 64,22; д) 580,28; е) 506,01.

**1.6. Десятичное число  $A$  эквивалентно числу  $B$  в недесятичной системе счисления. Найдите основание этой системы счисления:**

- |                          |                        |
|--------------------------|------------------------|
| 0) а) $A = 37; B = 101;$ | б) $A = 270; B = 534;$ |
| 1) а) $A = 61; B = 115;$ | б) $A = 254; B = 312;$ |
| 2) а) $A = 51; B = 201;$ | б) $A = 301; B = 610;$ |
| 3) а) $A = 71; B = 155;$ | б) $A = 175; B = 214;$ |
| 4) а) $A = 37; B = 211;$ | б) $A = 253; B = 375;$ |
| 5) а) $A = 94; B = 234;$ | б) $A = 401; B = 485;$ |
| 6) а) $A = 45; B = 140;$ | б) $A = 488; B = 602;$ |
| 7) а) $A = 29; B = 131;$ | б) $A = 272; B = 536;$ |
| 8) а) $A = 65; B = 341;$ | б) $A = 199; B = 531;$ |
| 9) а) $A = 25; B = 221;$ | б) $A = 325; B = 505.$ |

**1.7. Определите основание системы счисления, в которой произведены следующие вычисления:**

- |                    |                    |                    |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| 0) $64 + 56 = 153$ | 4) $41 + 53 = 134$ | 6) $43 + 34 = 132$ |
| 1) $35 + 42 = 121$ | 5) $65 + 34 = 132$ | 7) $62 + 74 = 156$ |
| 2) $44 + 22 = 110$ | 8) $72 + 48 = 131$ | 9) $32 + 23 = 121$ |
| 3) $24 + 23 = 102$ |                    |                    |

**1.8. Переведите восьмеричные числа в  $D_2$ :**

- |            |          |            |             |              |
|------------|----------|------------|-------------|--------------|
| 0) а) 151; | б) 5461; | в) 105,12; | д) 546,721; | е) 2072,056; |
| 1) а) 275; | б) 2346; | в) 207,61; | д) 230,461; | е) 1073,423; |
| 2) а) 321; | б) 3401; | в) 350,21; | д) 345,404; | е) 2406,504; |
| 3) а) 410; | б) 5147; | в) 410,73; | д) 516,457; | е) 5041,206; |
| 4) а) 235; | б) 4643; | в) 602,35; | д) 467,423; | е) 4610,173; |
| 5) а) 462; | б) 2412; | в) 406,22; | д) 240,125; | е) 7250,642; |
| 6) а) 341; | б) 7410; | в) 450,34; | д) 745,167; | е) 2405,703; |
| 7) а) 620; | б) 1546; | в) 506,62; | д) 156,406; | е) 4150,467; |
| 8) а) 354; | б) 5435; | в) 610,54; | д) 754,305; | е) 7204,125; |
| 9) а) 412; | б) 3024; | в) 404,17; | д) 347,224; | е) 2350,761. |

**1.9. Переведите шестнадцатеричные числа в  $D_2$ :**

- |            |          |            |              |
|------------|----------|------------|--------------|
| 0) а) B0D; | б) 1A2B; | в) 5C6,FA; | д) 1EA0,A16; |
| 1) а) E8C; | б) 6EA8; | в) 7F0,4F; | д) A05F,C1E; |
| 2) а) A3F; | б) 2B6F; | в) A35,4D; | д) 3B23,EA7; |
| 3) а) F3D; | б) 4F5D; | в) 54F,5D; | д) 40AD,C36; |

- |            |          |            |              |
|------------|----------|------------|--------------|
| 4) a) D1A; | b) 7D0C; | c) D67,5A; | d) 10F2,B3B; |
| 5) a) B9C; | b) 9A1D; | c) FD0,2C; | d) C30A,D58; |
| 6) a) C1F; | b) 3C5F; | c) B25,7E; | d) 2A5C,C9F; |
| 7) a) F0B; | b) 1C4D; | c) 15E,B7; | d) 6BE1,3E2; |
| 8) a) E4D; | b) 5AF2; | c) A5F,A4; | d) 6D31,4BD; |
| 9) a) B9E; | b) 8C6B; | c) C45,2F; | d) 3E0A,F63. |

**1.10. Переведите дробные числа в  $D_8$ :**

- |   |                                      |                              |
|---|--------------------------------------|------------------------------|
| 0) a) 10101010100,110001 <sub>(2)</sub> ; | b) 1010110100,10001 <sub>(2)</sub> ; | c) E7C,D19 <sub>(16)</sub> ; |
| 1) a) 10100011111,101110 <sub>(2)</sub> ; | b) 1010001111,10110 <sub>(2)</sub> ; | c) FD1,C23 <sub>(16)</sub> ; |
| 2) a) 11110101010,101101 <sub>(2)</sub> ; | b) 1110011010,10101 <sub>(2)</sub> ; | c) 3B4,FA8 <sub>(16)</sub> ; |
| 3) a) 11111001001,100011 <sub>(2)</sub> ; | b) 1111011001,10111 <sub>(2)</sub> ; | c) 14E,C5A <sub>(16)</sub> ; |
| 4) a) 11100010011,100010 <sub>(2)</sub> ; | b) 1100010011,10110 <sub>(2)</sub> ; | c) B0C,17C <sub>(16)</sub> ; |
| 5) a) 11001010101,100101 <sub>(2)</sub> ; | b) 1100000101,10001 <sub>(2)</sub> ; | c) CDA,2B7 <sub>(16)</sub> ; |
| 6) a) 10100010010,000111 <sub>(2)</sub> ; | b) 1010100010,00111 <sub>(2)</sub> ; |                              |
| 7) a) 10001001011,101010 <sub>(2)</sub> ; | b) 1011101011,10110 <sub>(2)</sub> ; | c) E40,D14 <sub>(16)</sub> ; |
| 8) a) 11101010101,101001 <sub>(2)</sub> ; | b) 1101000101,10101 <sub>(2)</sub> ; | c) CB0,46A <sub>(16)</sub> ; |
| 9) a) 10100110111,101000 <sub>(2)</sub> ; | b) 1000110111,10100 <sub>(2)</sub> ; | c) 4C2,71E <sub>(16)</sub> ; |
|   |                                      | c) 7DB,C42 <sub>(16)</sub> . |

**1.11. Переведите дробные числа в  $D_{16}$ :**

- |   |                                      |                             |
|---|--------------------------------------|-----------------------------|
| 0) a) 10010101101,101011 <sub>(2)</sub> ; | b) 1101101100,10001 <sub>(2)</sub> ; | c) 272,056 <sub>(8)</sub> ; |
| 1) a) 10101001111,111010 <sub>(2)</sub> ; | b) 1100011011,10110 <sub>(2)</sub> ; | c) 170,423 <sub>(8)</sub> ; |
| 2) a) 10101010101,101101 <sub>(2)</sub> ; | b) 1100110100,10101 <sub>(2)</sub> ; | c) 246,504 <sub>(8)</sub> ; |
| 3) a) 11100001101,001011 <sub>(2)</sub> ; | b) 1110110010,10111 <sub>(2)</sub> ; | c) 541,206 <sub>(8)</sub> ; |
| 4) a) 11001010111,100010 <sub>(2)</sub> ; | b) 1000100101,10110 <sub>(2)</sub> ; | c) 460,173 <sub>(8)</sub> ; |
| 5) a) 10011010101,101101 <sub>(2)</sub> ; | b) 1000001001,10001 <sub>(2)</sub> ; | c) 720,642 <sub>(8)</sub> ; |
| 6) a) 10100101000,001011 <sub>(2)</sub> ; | b) 1101000110,00111 <sub>(2)</sub> ; | c) 245,703 <sub>(8)</sub> ; |
| 7) a) 10010011111,101110 <sub>(2)</sub> ; | b) 1111010101,10110 <sub>(2)</sub> ; | c) 150,467 <sub>(8)</sub> ; |
| 8) a) 10110000101,101001 <sub>(2)</sub> ; | b) 1010001001,10101 <sub>(2)</sub> ; | c) 704,125 <sub>(8)</sub> ; |
| 9) a) 11000101000,011101 <sub>(2)</sub> ; | b) 1001101011,10100 <sub>(2)</sub> ; | c) 230,761 <sub>(8)</sub> ; |

**1.12. Сравните пары чисел и поставьте знак: <, > или =**

- |                         |                       |                      |                     |                     |                    |
|-------------------------|-----------------------|----------------------|---------------------|---------------------|--------------------|
| 0) a) 275 <sub>8</sub>  | B20 <sub>16</sub> ;   | b) 212 <sub>3</sub>  | 10A <sub>16</sub> ; | c) 430 <sub>5</sub> | 304 <sub>6</sub> ; |
| 1) a)                   | 100011 <sub>2</sub> ; | b) 640 <sub>7</sub>  | 610 <sub>8</sub> ;  | c) 510 <sub>7</sub> | 185 <sub>9</sub> ; |
| 2) a) 2A2 <sub>16</sub> | 110011 <sub>2</sub> ; | b) 10B <sub>16</sub> | 222 <sub>3</sub> ;  | c) 104 <sub>5</sub> | 122 <sub>3</sub> ; |
| 3) a) 610 <sub>8</sub>  | 657 <sub>8</sub> ;    | b) 810 <sub>9</sub>  | 3A0 <sub>16</sub> ; | c) 162 <sub>7</sub> | 322 <sub>6</sub> ; |
| 4) a) 1F6 <sub>16</sub> | A05 <sub>16</sub> ;   | b) 376 <sub>8</sub>  | 12D <sub>16</sub> ; | c) 320 <sub>4</sub> | 231 <sub>5</sub> ; |
| 5) a) 117 <sub>8</sub>  | 110110 <sub>2</sub> ; | b) 31C <sub>16</sub> | 405 <sub>6</sub> ;  | c) 135 <sub>6</sub> | 304 <sub>5</sub> ; |

- 6) а)  $523_8$   $100101_2$ ; б)  $461_7$   $275_9$ ; в)  $241_5$   $323_4$ ;  
 7) а)  $433_8$   $B1A_{16}$ ; б)  $10C_{16}$   $541_6$ ; в)  $350_7$   $430_5$ ;  
 8) а)  $563_8$   $506_8$ ; б)  $250_8$   $332_4$ ; в)  $501_6$   $276_9$ ;  
 9) а)  $25F_{16}$   $101110_2$ ; б)  $1A0_{16}$   $600_9$ ; в)  $221_3$   $200_4$ .  
 а)  $464_8$

## Тема 2. Позиционные нетрадиционные системы счисления

К нетрадиционным системам счисления относятся системы, в которых либо базис не является геометрической прогрессией, а символы алфавита есть целые неотрицательные числа (*фибоначчиева и факториальная системы счисления*), либо базис является геометрической прогрессией, но его символы не являются целыми неотрицательными числами (*уравновешенные системы счисления*).

Базисом фибоначчиевой системы ( $D_{fb}$ ) является последовательность 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ..., т.е. подряд идущие числа Фибоначчи. В качестве алфавита используются только цифры 0 и 1.

Правило: для перевода десятичного числа в фибоначчиеву систему счисления необходимо разложить его на сумму неповторяющихся чисел Фибоначчи по убыванию. В результат заносится 1, если это число Фибоначчи присутствует в разложении, иначе заносится 0.

Результат обратного перевода представляется в виде полинома, расписанного по числам Фибоначчи с коэффициентами 0 и 1.

Базисом факториальной системы счисления ( $D_\phi$ ) является последовательность:  $1!, 2!, 3!, 4!, \dots, (n-1)!, n!, \dots$ . Количество цифр алфавита, используемых в разряде, увеличивается с ростом номера разряда. Общее представление числа:  $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 = a_n n! + a_{n-1} (n-1)! + \dots + a_2 2! + a_1 1!$

Правило: для перевода десятичного числа в факториальную систему счисления необходимо в первый раз делить его на 2, затем первое частное на 3, второе частное на 4 и т.д. пока можно делить. Результат выписывается как остатки от деления, начиная с последнего частного в обратном порядке.

Результат обратного перевода представляется в виде полинома, расписанного как факториалы чисел  $1!, 2!, 3!, 4!, \dots, n!, \dots$ , а коэффициентами являются цифры исходного числа.

Простейшей из уравновешенных систем счисления является *троичная симметричная система счисления* ( $D_3$ ). В этой системе счисления в качестве основания используется число 3, а в качестве алфавита – троичные цифры 1, 0 и -1.

Правило: для перевода десятичного числа в уравновешенную троичную систему счисления необходимо перевести его в обычную троичную систему счисления. Прибавляем к нему число, состоящее из единиц (количество разрядов должно совпадать). Затем вычтем это число, причем при вычитании 1 из 2, получаем в результате 1, при вычитании 1 из 1 получаем 0, а при вычитании 1 из 0 получаем в результате -1.

### Примеры выполнения заданий

1. Переведите числа из  $D_{10}$  в фибоначчиеву, факториальную и троичную симметричную системы счисления:

$$10_{10} = 8 + 2 = 10010_{\text{fib}}$$

$$10_{10} = 120_{\Phi}$$

$$10_{10} = 101_3$$

$$25_{10} = 21 + 3 + 1 = 1000101_{\text{fib}}$$

$$25_{10} = 1001_{\Phi}$$

$$25_{10} = 10-11_3$$

2. Переведите числа из фибоначчиевой, факториальной и троичной симметричной систем счисления в  $D_{10}$ :

$$100_{\text{fib}} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 = 5_{10}$$

$$3221_{\Phi} = 3 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 1 \cdot 1! = 89_{10}$$

$$11-10_3 = 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 - 1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 = 33_{10}$$

### Задания для самостоятельного выполнения

2.1. Переведите числа из  $D_{10}$  в фибоначчиеву, факториальную и троичную симметричную системы счисления:

- |           |        |        |        |        |        |        |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0) a) 15; | b) 23; | c) 57; | d) 42; | e) 22; | f) 47; | g) 70; |
| 1) a) 14; | b) 27; | c) 49; | d) 38; | e) 45; | f) 53; | g) 55; |
| 2) a) 13; | b) 34; | c) 46; | d) 43; | e) 33; | f) 76; | g) 60; |
| 3) a) 12; | b) 20; | c) 54; | d) 36; | e) 52; | f) 62; | g) 85; |
| 4) a) 16; | b) 30; | c) 58; | d) 64; | e) 29; | f) 58; | g) 90; |
| 5) a) 11; | b) 25; | c) 47; | d) 32; | e) 42; | f) 49; | g) 40; |
| 6) a) 17; | b) 28; | c) 65; | d) 46; | e) 57; | f) 58; | g) 80; |
| 7) a) 19; | b) 21; | c) 63; | d) 35; | e) 44; | f) 61; | g) 65; |
| 8) a) 18; | b) 33; | c) 52; | d) 41; | e) 37; | f) 54; | g) 77; |
| 9) a) 10; | b) 26; | c) 61; | d) 48; | e) 24; | f) 67; | g) 45. |

2.2. Переведите числа из фибоначчиевой системы счисления в  $D_{10}$ :

- |                           |                         |                         |                         |                         |
|---------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 0) a) 1100 <sub>fib</sub> | b) 10101 <sub>fib</sub> | c) 10010 <sub>fib</sub> | d) 10100 <sub>fib</sub> | e) 11100 <sub>fib</sub> |
| 1) a) 1010 <sub>fib</sub> | b) 10101 <sub>fib</sub> | c) 11101 <sub>fib</sub> | d) 11011 <sub>fib</sub> | e) 10010 <sub>fib</sub> |
| 2) a) 1001 <sub>fib</sub> | b) 11100 <sub>fib</sub> | c) 11011 <sub>fib</sub> | d) 11010 <sub>fib</sub> | e) 11101 <sub>fib</sub> |
| 3) a) 1101 <sub>fib</sub> | b) 10111 <sub>fib</sub> | c) 11010 <sub>fib</sub> | d) 10110 <sub>fib</sub> | e) 11001 <sub>fib</sub> |
| 4) a) 1111 <sub>fib</sub> | b) 11001 <sub>fib</sub> | c) 10111 <sub>fib</sub> | d) 10001 <sub>fib</sub> | e) 10100 <sub>fib</sub> |
| 5) a) 1000 <sub>fib</sub> | b) 11001 <sub>fib</sub> | c) 11101 <sub>fib</sub> | d) 11010 <sub>fib</sub> | e) 10000 <sub>fib</sub> |
| 6) a) 1100 <sub>fib</sub> | b) 10011 <sub>fib</sub> | c) 10101 <sub>fib</sub> | d) 10010 <sub>fib</sub> | e) 11001 <sub>fib</sub> |
| 7) a) 1000 <sub>fib</sub> | b) 10011 <sub>fib</sub> | c) 11001 <sub>fib</sub> | d) 10101 <sub>fib</sub> | e) 11100 <sub>fib</sub> |
| 8) a) 1110 <sub>fib</sub> | b) 11001 <sub>fib</sub> | c) 11110 <sub>fib</sub> | d) 11111 <sub>fib</sub> | e) 11000 <sub>fib</sub> |
| 9) a) 1011 <sub>fib</sub> | b) 10100 <sub>fib</sub> | c) 10001 <sub>fib</sub> | d) 10101 <sub>fib</sub> | e) 11100 <sub>fib</sub> |

**2.3. Переведите числа из факториальной системы счисления в  $D_{10}$ :**

- |                 |              |              |               |               |               |
|-----------------|--------------|--------------|---------------|---------------|---------------|
| 0) a) $25_\phi$ | b) $32_\phi$ | c) $52_\phi$ | d) $150_\phi$ | e) $405_\phi$ | f) $307_\phi$ |
| 1) a) $30_\phi$ | b) $45_\phi$ | c) $43_\phi$ | d) $165_\phi$ | e) $351_\phi$ | f) $450_\phi$ |
| 2) a) $22_\phi$ | b) $42_\phi$ | c) $27_\phi$ | d) $102_\phi$ | e) $277_\phi$ | f) $402_\phi$ |
| 3) a) $45_\phi$ | b) $50_\phi$ | c) $67_\phi$ | d) $255_\phi$ | e) $298_\phi$ | f) $550_\phi$ |
| 4) a) $26_\phi$ | b) $61_\phi$ | c) $44_\phi$ | d) $280_\phi$ | e) $259_\phi$ | f) $601_\phi$ |
| 5) a) $33_\phi$ | b) $76_\phi$ | c) $39_\phi$ | d) $170_\phi$ | e) $364_\phi$ | f) $600_\phi$ |
| 6) a) $35_\phi$ | b) $62_\phi$ | c) $41_\phi$ | d) $135_\phi$ | e) $305_\phi$ | f) $530_\phi$ |
| 7) a) $23_\phi$ | b) $54_\phi$ | c) $38_\phi$ | d) $157_\phi$ | e) $507_\phi$ | f) $505_\phi$ |
| 8) a) $21_\phi$ | b) $56_\phi$ | c) $49_\phi$ | d) $210_\phi$ | e) $419_\phi$ | f) $560_\phi$ |
| 9) a) $44_\phi$ | b) $31_\phi$ | c) $27_\phi$ | d) $146_\phi$ | e) $247_\phi$ | f) $380_\phi$ |

**2.4. Переведите числа из троичной симметричной системы счисления в  $D_{10}$ :**

- |                  |               |                |                |
|------------------|---------------|----------------|----------------|
| 0) a) $1-100_3$  | b) $10-11_3$  | c) $10-101_3$  | d) $1000-1_3$  |
| 1) a) $1-1-10_3$ | b) $1-101_3$  | c) $10-1-10_3$ | d) $110-10_3$  |
| 2) a) $10-11_3$  | b) $1-101_3$  | c) $101-10_3$  | d) $11-100_3$  |
| 3) a) $10-10_3$  | b) $-100-1_3$ | c) $-100-11_3$ | d) $100-10_3$  |
| 4) a) $1-1-10_3$ | b) $10-1-1_3$ | c) $10-1-10_3$ | d) $1010-1_3$  |
| 5) a) $1-1-10_3$ | b) $10-10_3$  | c) $-11-110_3$ | d) $110-10_3$  |
| 6) a) $11-10_3$  | b) $1-100_3$  | c) $-11-100_3$ | d) $10-101_3$  |
| 7) a) $-10-10_3$ | b) $-10-11_3$ | c) $10-110_3$  | d) $1-10-11_3$ |
| 8) a) $-101-1_3$ | b) $-11-10_3$ | c) $101-10_3$  | d) $1-1010_3$  |
| 9) a) $1-100_3$  | b) $11-10_3$  | c) $1-1000_3$  | d) $1100-1_3$  |

**2.5. Сравните пары чисел и поставьте знак:  $<$ ,  $>$  или  $=$**

- |                 |              |                   |           |                 |                |
|-----------------|--------------|-------------------|-----------|-----------------|----------------|
| 0) a) $18_\phi$ | $1010-1_3$   | b) $111011_{fib}$ | $59_\phi$ | c) $10011-1_3$  | $110101_{fib}$ |
| 1) a) $21_\phi$ | $1-110-1_3$  | b) $111010_{fib}$ | $14_\phi$ | c) $-1011-10_3$ | $101100_{fib}$ |
| 2) a) $36_\phi$ | $10-10-1_3$  | b) $101110_{fib}$ | $22_\phi$ | c) $-101100_3$  | $101100_{fib}$ |
| 3) a) $27_\phi$ | $-1010-1_3$  | b) $101100_{fib}$ | $38_\phi$ | c) $10-10-11_3$ | $111011_{fib}$ |
| 4) a) $33_\phi$ | $-110-1-1_3$ | b) $110110_{fib}$ | $24_\phi$ | c) $10-10-10_3$ | $101110_{fib}$ |
| 5) a) $\phi$    | $-110-10_3$  | b) $111001_{fib}$ | $25_\phi$ | c) $-101-100_3$ | $101001_{fib}$ |
| 6) a) $23_\phi$ | $10-1-10_3$  | b) $100011_{fib}$ | $31_\phi$ | c) $10-1-100_3$ | $110101_{fib}$ |
| 7) a) $19_\phi$ | $-100-10_3$  | b) $101101_{fib}$ | $12_\phi$ | c) $110-1-10_3$ | $110100_{fib}$ |
| 8) a) $17_\phi$ | $-1-1010_3$  | b) $110011_{fib}$ | $13_\phi$ | c) $-1101-10_3$ | $110110_{fib}$ |
| 9) a) $\phi$    | $10-110_3$   | b) $100101_{fib}$ | $32_\phi$ | c) $11100-1_3$  | $101100_{fib}$ |
- a)  $20_\phi$

*a)*  $29_\phi$



### Тема 3. Арифметические операции над числами в позиционных системах счисления

Выполнение операций сложения и вычитания в позиционных традиционных системах счисления осуществляется по тем же правилам, что и в десятичной системе счисления.

Для этого необходимо выполнять некоторые правила:

правило: в записи результатов сложения и вычитания могут быть использованы только цифры алфавита системы счисления;

правило: переполнение разряда наступает, когда результат сложения больше или равен основанию системы. В этом случае для записи результата надо вычесть основание из результата, записать остаток, а к старшему разряду прибавить единицу переполнения;

правило: если при вычитании приходится занимать единицу в старшем разряде, то эта цена разряда равна основанию системы счисления.

#### **Арифметические операции в двоичной системе счисления**

В двоичной системе счисления арифметические операции выполняются поразрядно с использованием таблиц:

*двоичного сложения*

+	0	1
0	0	1
1	1	10

*двоичного вычитания*

-	0	1
1	1	0
10	0	1

*двоичного умножения*

×	0	1
0	0	0
1	0	1

#### **Примеры выполнения заданий**

1. Сложите два целых числа

2. Сложите два дробных числа

$$\begin{array}{r}
 110110 \\
 +1010101 \\
 \hline
 10001011
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 110110,1101 \\
 +101010,101 \\
 \hline
 1000110,0111
 \end{array}$$

3. Найдите произведение чисел

$$\begin{array}{r}
 \times \quad 10011 \\
 \quad 1011 \\
 \hline
 \quad 10011 \\
 + \quad 10011 \\
 \quad 00000 \\
 \hline
 10011 \\
 \hline
 11010001 \\
 \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \end{array}
 \end{array}$$

4. Найдите частное чисел

$$\begin{array}{r}
 11010001 \mid 1011 \\
 \underline{1011} \phantom{0000} \\
 10000 \phantom{00} \\
 \underline{1011} \phantom{00} \\
 1011 \phantom{00} \\
 \underline{1011} \\
 0
 \end{array}$$

3. Найдите разность чисел

$$\begin{array}{r}
 10001 \\
 - 1011 \\
 \hline
 110
 \end{array}$$

Проверка сложением:

$$\begin{array}{r}
 1011 \\
 + 110 \\
 \hline
 10001 \\
 \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \end{array}
 \end{array}$$

### Арифметические операции в восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления

#### Примеры выполнения заданий

1. Сложите два числа:

$$\begin{array}{r}
 502_8 \quad ABC_{16} \\
 + 146_8 \quad + 62_{16} \\
 \hline
 650_8 \quad B1E_{16}
 \end{array}$$

2. Найдите разность чисел:

$$\begin{array}{r}
 502_8 \quad ABC_{16} \\
 - 146_8 \quad - 62_{16} \\
 \hline
 334_8 \quad A5A_{16}
 \end{array}$$

3. Найдите произведение двух чисел:

$$\begin{array}{r}
 \times 502_8 \quad \times ABC_{16} \\
 \quad 146_8 \quad \quad 621_{16} \\
 \hline
 \quad 3614 \quad \quad 1578 \\
 + 1410 \quad \quad + 4068 \\
 \hline
 502 \quad \quad ABC \\
 \hline
 100114_8 \quad ED7F8_{16}
 \end{array}$$

### Арифметические операции в позиционных нетрадиционных системах счисления

Десятичную систему счисления используют при выполнении арифметических действий над числами в позиционных нетрадиционных системах счисления ввиду сложности вычислений.

### Задания для самостоятельного выполнения

#### 3.1. Выполните сложение следующих пар двоичных чисел:

- 0) а) 1011011 и 111011; б) 1010,011 и 1110,011; в) 100,0001 и 101,1011;
- 1) а) 1110011 и 101011; б) 1110,011 и 1010,101; в) 110,1011 и 111,0101;
- 2) а) 1010011 и 100101; б) 1010,011 и 100,101; в) 101,0011 и 101,0111;
- 3) а) 1110011 и 111101; б) 1110,111 и 1111,001; в) 110,0011 и 111,1001;
- 4) а) 1101011 и 111001; б) 1001,011 и 101,001; в) 100,1011 и 111,0001;
- 5) а) 1110001 и 110110; б) 1110,111 и 1101,010; в) 101,0001 и 101,0110;
- 6) а) 100100 и 1111011; б) 1001,100 и 1111,011; в) 110,0100 и 111,1011;
- 7) а) 1111100 и 100101; б) 1101,101 и 1010,001; в) 110,1100 и 100,0101;
- 8) а) 1100100 и 110001; б) 1100,100 и 1110,101; в) 100,0100 и 111,0001;
- 9) а) 1101011 и 101001; б) 1101,111 и 1101,001; в) 110,1011 и 101,0101.

#### 3.2. Найдите разность следующих пар двоичных чисел:

- 0) а) 1011001 и 1110101; б) 1010,11 и 1110,011; в) 1010,001 и 101,111;
- 1) а) 11010011 и 110101; б) 1010,011 и 1010,101; в) 1110,111 и 110,001;
- 2) а) 11011011 и 101010; б) 1010,011 и 1000,101; в) 1010,011 и 101,011;
- 3) а) 1111001 и 1010011; б) 1010,11 и 10011,001; в) 1110,011 и 101,101;
- 4) а) 1010011 и 1101101; б) 1001,01 и 1001,001; в) 1101,111 и 111,001;
- 5) а) 1100011 и 1011001; б) 1100,11 и 10101,010; в) 1111,001 и 101,010;
- 6) а) 1111001 и 110110; б) 1011,01 и 11001,011; в) 1000,001 и 111,111;
- 7) а) 1101100 и 101010; б) 1101,11 и 1010,001; в) 1111,101 и 100,001;
- 8) а) 11000011 и 11010; б) 1000,01 и 1110,111; в) 1101,011 и 101,001;
- 9) а) 111100 и 110010; б) 1101,111 и 1101,011; в) 1110,101 и 101,011.

#### 3.3. Вычислите значения выражений в двоичной системе счисления:

- 0)  $(1000111+11101+101010111)-(11001100+10111+11101)$ ;
- 1)  $(1000111-11101+101010111)+(11001100-10111-11101)$ ;
- 2)  $(1000111-11101+101010111)+(11001100+10111-1110)$ ;
- 3)  $(1110101+10001+10101110)-(1111100+100011-11011)$ ;
- 4)  $(1000111+11101-101010111)-(11001100-10111+10110)$ ;
- 5)  $(1110101-10001-10101110)+(1111100-100011+11011)$ ;
- 6)  $(11110101+10101-110111)+(11001100-10111+1110)$ ;
- 7)  $(1000111-100101+10101111)-(111000+10011+1101110)$ ;
- 8)  $(1110101+10001+1010111)-(1111100-100011-11011)$ ;
- 9)  $(1000111+100111+110101)+(1000110+110111-101110)$ .

**3.4. Найдите произведение следующих пар двоичных чисел:**

- |                     |                 |                 |
|---------------------|-----------------|-----------------|
| 0) a) 10011 и 1101; | b) 11010 и 111; | c) 1010 и 1001; |
| 1) a) 11101 и 1010; | b) 11011 и 111; | c) 1110 и 1110; |
| 2) a) 10111 и 1011; | b) 10010 и 101; | c) 1011 и 1001; |
| 3) a) 11011 и 1101; | b) 11010 и 101; | c) 1110 и 1101; |
| 4) a) 10011 и 1001; | b) 11001 и 101; | c) 1101 и 1011; |
| 5) a) 11110 и 1011; | b) 11100 и 111; | c) 1101 и 1001; |
| 6) a) 10101 и 1010; | b) 11011 и 110; | c) 1001 и 1011; |
| 7) a) 11011 и 1110; | b) 11101 и 101; | c) 1110 и 1011; |
| 8) a) 10011 и 1010; | b) 11001 и 111; | c) 1100 и 1101; |
| 9) a) 11100 и 1001; | b) 11101 и 110; | c) 1010 и 1010. |

**3.5. Найдите частное и остаток при делении двоичных чисел:**

- |                      |                     |                     |
|----------------------|---------------------|---------------------|
| 0) a) 1101101 : 101; | b) 11011010 : 1010; | c) 11010111 : 1011; |
| 1) a) 1001011 : 111; | b) 10010111 : 1001; | c) 10110110 : 1101; |
| 2) a) 1110010 : 111; | b) 11100101 : 1011; | c) 11100010 : 1001; |
| 3) a) 1111010 : 101; | b) 11110100 : 1011; | c) 11101101 : 1010; |
| 4) a) 1010011 : 110; | b) 10100110 : 1001; | c) 11001100 : 1101; |
| 5) a) 1001011 : 111; | b) 10010110 : 1101; | c) 10101101 : 1011; |
| 6) a) 1110101 : 110; | b) 11101011 : 1111; | c) 11110001 : 1101; |
| 7) a) 1010110 : 110; | b) 10101101 : 1110; | c) 10110101 : 1101; |
| 8) a) 1101110 : 101; | b) 11011100 : 1001; | c) 11101101 : 1011; |
| 9) a) 1011101 : 101. | b) 10111011 : 1010. | c) 10101010 : 1010. |

**3.6. Вычислите сумму следующих пар восьмеричных чисел:**

- |                  |                   |                   |                   |
|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 0) a) 175 и 231; | b) 205,6 и 301,4; | c) 72,17 и 14,34; | d) 16,27 и 35,01; |
| 1) a) 457 и 137; | b) 157,7 и 307,2; | c) 45,03 и 25,66; | d) 15,03 и 51,66; |
| 2) a) 761 и 435; | b) 301,3 и 512,5; | c) 60,24 и 13,56; | d) 23,25 и 34,34; |
| 3) a) 345 и 355; | b) 450,4 и 517,4; | c) 57,03 и 17,05; | d) 35,41 и 16,07; |
| 4) a) 135 и 155; | b) 351,5 и 503,3; | c) 65,45 и 50,44; | d) 12,61 и 44,06; |
| 5) a) 245 и 225; | b) 405,2 и 620,7; | c) 46,34 и 12,26; | d) 40,63 и 22,15; |
| 6) a) 261 и 354; | b) 611,4 и 436,5; | c) 15,33 и 65,35; | d) 32,26 и 36,52; |
| 7) a) 622 и 115; | b) 207,1 и 614,7; | c) 71,07 и 24,02; | d) 17,53 и 47,16; |
| 8) a) 226 и 156; | b) 653,2 и 106,6; | c) 24,06 и 63,16; | d) 26,05 и 56,25; |
| 9) a) 422 и 116; | b) 225,7 и 706,3; | c) 16,05 и 21,07; | d) 37,14 и 45,33. |

**3.7. Вычислите сумму следующих пар шестнадцатиричных чисел:**

- |                |                 |               |                 |
|----------------|-----------------|---------------|-----------------|
| 0) a) 8A и 3E; | b) C4,6 и 1C,4; | c) D7F и AB1; | d) 6,7E и A,B1; |
| 1) a) D7 и 7B; | b) 6,7A и 3,D9; | c) 457 и 2B7; | d) A,57 и B,07; |

- 2) a)  $6F$  и  $C3$ ; b)  $1E, 3$  и  $5F, 7$ ; c)  $765$  и  $BC3$ ; d)  $E, 52$  и  $C, 34$ ;  
 3) a)  $A5$  и  $E5$ ; b)  $F, D4$  и  $7, 4C$ ; c)  $65F$  и  $B6A$ ; d)  $5, D4$  и  $6, 0A$ ;  
 4) a)  $3E$  и  $5C$ ; b)  $5A, 5$  и  $3E, 9$ ; c)  $A65$  и  $BD0$ ; d)  $F, 61$  и  $D, 05$ ;  
 5) a)  $D9$  и  $2D$ ; b)  $7, 2C$  и  $6, 7A$ ; c)  $F76$  и  $A12$ ; d)  $5, B6$  и  $E, 12$ ;  
 6) a)  $2C$  и  $C4$ ; b)  $1F, 2$  и  $4B, 8$ ; c)  $5DC$  и  $F76$ ; d)  $E, 89$  и  $7, C5$ ;  
 7) a)  $6A$  и  $5F$ ; b)  $7, 1D$  и  $6, 7E$ ; c)  $267$  и  $BCD$ ; d)  $7, 5F$  и  $D, 36$ ;  
 8) a)  $D6$  и  $6E$ ; b)  $A5, 2$  и  $C4, 2$ ; c)  $1A5$  и  $76D$ ; d)  $6, 0A$  и  $E, D5$ ;  
 9) a)  $B2$  и  $1C$ ; b)  $2B, 7$  и  $E6, 3$ ; c)  $A27$  и  $FD3$ ; d)  $7, B1$  и  $5, 3F$ .

**3.8. Найдите разность следующих пар восьмеричных чисел:**

- 0) a)  $540$  и  $134$ ; b)  $41, 3$  и  $34, 5$ ; c)  $70, 14$  и  $16, 32$ ; d)  $56, 02$  и  $35, 21$ ;  
 1) a)  $407$  и  $332$ ; b)  $50, 2$  и  $34, 3$ ; c)  $43, 06$  и  $25, 04$ ; d)  $15, 14$  и  $51, 65$ ;  
 2) a)  $567$  и  $405$ ; b)  $31, 1$  и  $27, 5$ ; c)  $31, 24$  и  $15, 56$ ; d)  $23, 05$  и  $34, 32$ ;  
 3) a)  $435$  и  $251$ ; b)  $44, 2$  и  $40, 4$ ; c)  $52, 03$  и  $27, 05$ ; d)  $35, 01$  и  $16, 17$ ;  
 4) a)  $361$  и  $142$ ; b)  $31, 1$  и  $13, 3$ ; c)  $63, 41$  и  $50, 44$ ; d)  $12, 03$  и  $44, 16$ ;  
 5) a)  $430$  и  $165$ ; b)  $65, 5$  и  $22, 6$ ; c)  $46, 32$  и  $22, 26$ ; d)  $40, 06$  и  $22, 13$ ;  
 6) a)  $612$  и  $541$ ; b)  $37, 6$  и  $16, 7$ ; c)  $45, 33$  и  $15, 35$ ; d)  $32, 07$  и  $36, 12$ ;  
 7) a)  $423$  и  $125$ ; b)  $71, 3$  и  $62, 4$ ; c)  $71, 07$  и  $24, 02$ ; d)  $17, 05$  и  $47, 26$ ;  
 8) a)  $264$  и  $156$ ; b)  $53, 4$  и  $26, 5$ ; c)  $24, 06$  и  $13, 16$ ; d)  $26, 04$  и  $56, 21$ ;  
 9) a)  $402$  и  $163$ ; b)  $54, 5$  и  $27, 6$ ; c)  $36, 05$  и  $21, 07$ ; d)  $37, 01$  и  $45, 03$ .

**3.9. Найдите разность следующих пар шестнадцатеричных чисел:**

- 0) a)  $4A$  и  $3E$ ; b)  $E0F$  и  $A16$ ; c)  $415, A$  и  $341, E$ ; d)  $A, B5$  и  $7, B1$ ;  
 1) a)  $B7$  и  $29$ ; b)  $A57$  и  $1BB$ ; c)  $570, B$  и  $302, D$ ; d)  $B, C6$  и  $8, C7$ ;  
 2) a)  $6E$  и  $4D$ ; b)  $5FA$  и  $23D$ ; c)  $351, D$  и  $127, A$ ; d)  $C, D7$  и  $9, D4$ ;  
 3) a)  $3D$  и  $2A$ ; b)  $2EF$  и  $6A5$ ; c)  $454, F$  и  $170, D$ ; d)  $D, E8$  и  $1, A7$ ;  
 4) a)  $A6$  и  $4E$ ; b)  $B09$  и  $2BD$ ; c)  $301, E$  и  $113, C$ ; d)  $E, F9$  и  $2, B5$ ;  
 5) a)  $4C$  и  $1F$ ; b)  $D12$  и  $1EB$ ; c)  $650, B$  и  $222, E$ ; d)  $F, A0$  и  $3, C2$ ;  
 6) a)  $6B$  и  $5A$ ; b)  $4B2$  и  $1AB$ ; c)  $161, E$  и  $136, C$ ; d)  $A, B1$  и  $4, C5$ ;  
 7) a)  $2E$  и  $1D$ ; b)  $FA7$  и  $20D$ ; c)  $701, D$  и  $625, B$ ; d)  $B, C2$  и  $5, D6$ ;  
 8) a)  $F4$  и  $1C$ ; b)  $A7E$  и  $6D1$ ; c)  $503, A$  и  $216, F$ ; d)  $C, D2$  и  $6, E5$ ;  
 9) a)  $2D$  и  $1A$ ; b)  $7CD$  и  $30F$ ; c)  $540, F$  и  $237, E$ ; d)  $D, E3$  и  $7, F2$ .

**3.10. Найдите произведение следующих пар восьмеричных чисел:**

- 0) a)  $32$  и  $13$ ; b)  $415$  и  $1, 05$ ; c)  $72, 1$  и  $14, 3$ ; d)  $16, 27$  и  $35, 01$ ;  
 1) a)  $46$  и  $21$ ; b)  $570$  и  $3, 02$ ; c)  $45, 5$  и  $25, 6$ ; d)  $15, 03$  и  $51, 66$ ;  
 2) a)  $67$  и  $15$ ; b)  $351$  и  $1, 07$ ; c)  $60, 2$  и  $13, 5$ ; d)  $23, 25$  и  $34, 34$ ;  
 3) a)  $35$  и  $21$ ; b)  $454$  и  $2, 04$ ; c)  $57, 3$  и  $17, 1$ ; d)  $35, 41$  и  $16, 07$ ;  
 4) a)  $61$  и  $14$ ; b)  $301$  и  $1, 03$ ; c)  $65, 4$  и  $50, 4$ ; d)  $12, 61$  и  $44, 06$ ;

- 5) a) 35 и 16; b) 650 и 2,06; c) 46,3 и 12,2; d) 40,63 и 22,15;  
 6) a) 24 и 13; b) 161 и 1,07; c) 15,3 и 65,3; d) 32,26 и 36,52;  
 7) a) 37 и 15; b) 701 и 2,05; c) 71,7 и 24,4; d) 17,53 и 47,16;  
 8) a) 64 и 12; b) 503 и 2,06; c) 24,6 и 63,6; d) 26,05 и 56,25;  
 9) a) 42 и 16; b) 540 и 2,03; c) 16,5 и 21,7; d) 37,14 и 45,33.

**3.11. Найдите произведение следующих пар шестнадцатиричных чисел:**

- 0) a) 8A и 3E; b) 2B и A1,3; c) C4,6 и 1C,4; d) A0,15 и 70,B;  
 1) a) D7 и 7B; b) 3A и 1B,4; c) 67,A и 3D,9; d) B1,16 и 80,C;  
 2) a) 6F и C3; b) 1F и 2D,6; c) 1E,3 и 5F,7; d) C3,17 и 90,D;  
 3) a) A5 и E5; b) 2E и A5,2; c) FD,4 и 74,C; d) D5,18 и 10,A;  
 4) a) 3E и 5C; b) 9A и 2D,7; c) 5A,5 и 3E,9; d) E5,19 и 20,B;  
 5) a) D9 и 2D; b) 2D и 1B,3; c) 72,C и 67,A; d) F1,11 и 30,C;  
 6) a) 2C и C4; b) 4B и 1B,4; c) 1F,2 и 4B,8; d) A6,14 и 40,C;  
 7) a) 6A и 5F; b) 5A и 2D,5; c) 71,D и 67,E; d) 0B,12 и 50,D;  
 8) a) D6 и 6E; b) 6E и D1,2; c) A5,2 и C4,2; d) C9,13 и 60,E;  
 9) a) B2 и 1C; b) 7C и 3F,3; c) 2B,7 и E6,3; d) D2,15 и 10,F.

**3.12. Решите уравнения:**

- 0)  $53_8 - x = 46_8$ ; 1)  $25_8 + x = 72_8$ ; 2)  $x : 64_{16} = 22_{16}$ ;  
 $x : 3E_{16} = 32_{16}$ ;  $x : 17_8 = 20_8$ ;  $73_8 + x = 116_8$ ;  
 3)  $x - A2_{16} = 27_{16}$ ; 4)  $7B_{16} + x = AF_{16}$ ; 5)  $x : 33_{16} = 65_{16}$ ;  
 $x : 12_8 = 51_8$ ;  $x : 21_8 = 15_8$ ;  $x - 14_8 = 42_8$ ;  
 6)  $x + A1_{16} = B5_{16}$ ; 7)  $62_8 - x = 47_8$ ; 8)  $x : 23_8 = 77_8$ ;  
 $x : 56_8 = 12_8$ ;  $x : 91_{16} = A3_{16}$ ;  $C9_{16} - x = 27_{16}$ ;  
 9)  $x + 14_8 = 42_8$ ;  
 $x : 22_{16} = EE_{16}$ ;

**3.13. Найдите сумму и разность чисел:**

- 0) a)  $11001_{fib}$  и  $1010_{fib}$  b)  $415_{\phi}$  и  $101_{\phi}$  c)  $1001-l_3$  и  $1010-l_3$   
 1) a)  $11011_{fib}$  и  $1110_{fib}$  b)  $920_{\phi}$  и  $106_{\phi}$  c)  $-101-l_3$  и  $1-110-l_3$   
 2) a)  $10100_{fib}$  и  $1010_{fib}$  b)  $671_{\phi}$  и  $405_{\phi}$  c)  $-101-l_3$  и  $10-10-l_3$   
 3) a)  $10010_{fib}$  и  $1011_{fib}$  b)  $820_{\phi}$  и  $178_{\phi}$  c)  $10-101_3$  и  $-1010-l_3$   
 4) a)  $10101_{fib}$  и  $1110_{fib}$  b)  $309_{\phi}$  и  $141_{\phi}$  c)  $10-l-l_3$  и  $-110-l-l_3$   
 5) a)  $10111_{fib}$  и  $1001_{fib}$  b)  $722_{\phi}$  и  $151_{\phi}$  c)  $-101-l_3$  и  $-110-l_3$   
 6) a)  $11110_{fib}$  и  $1010_{fib}$  b)  $499_{\phi}$  и  $513_{\phi}$  c)  $10-l-l_3$  и  $10-l-l_3$   
 7) a)  $11001_{fib}$  и  $1011_{fib}$  b)  $290_{\phi}$  и  $118_{\phi}$  c)  $10-l-l_3$  и  $-100-l_3$

- 8) а)  $10111_{\text{fib}}$  и  $1110_{\text{fib}}$  б)  $801_{\text{ф}}$  и  $302_{\text{ф}}$  в)  $-101-10_3$  и  $-1-1010_3$   
 9) а)  $10101_{\text{fib}}$  и  $1110_{\text{fib}}$  б)  $732_{\text{ф}}$  и  $119_{\text{ф}}$  в)  $1100-1_3$  и  $10-110_3$

#### Тема 4. Представление целых чисел в памяти ПК

Элементарная ячейка памяти ЭВМ имеет длину 8 бит (байт). Каждый байт имеет свой номер (*адрес*). Наибольшую последовательность бит, которую ЭВМ может обрабатывать как единое целое, называют *машинным словом*. Длина машинного слова зависит от разрядности процессора и может быть равной 16, 32 битам и т.д.

Целые числа типа *Integer* лежат в диапазоне от  $-32768$  ( $-2^{15}$ ) до  $32767$  ( $2^{15} - 1$ ) и для их хранения отводится 2 байта. Длинное целое типа *LongInt* лежит в диапазоне от  $-2^{31}$  до  $2^{31} - 1$  и размещается в 4 байтах. Короткое целое типа *Short Integer* лежит в диапазоне от  $-2^7$  до  $2^7 - 1$  и размещается в 1 байте и т.д.

Данные могут быть интерпретированы как числа со знаками, так и без знаков. В случае представления величины со знаком самый левый (старший) разряд указывает на положительное число, если содержит ноль, и на отрицательное, если - единицу. Разряды нумеруются справа налево, начиная с 0.

*Прямой код целого числа* может быть получен следующим образом: число переводится в двоичную систему счисления, а затем его двоичную запись слева дополняют таким количеством незначащих нулей, сколько требует тип данных, к которому принадлежит число. Для более компактной записи чаще используют шестнадцатеричный код.

*Дополнительный код* положительного числа совпадает с его прямым кодом, а целого отрицательного числа может быть получен по следующему алгоритму:

- 1) записать прямой код модуля числа;
- 2) инвертировать его (заменить 1 - нулями, нули - 1);
- 3) прибавить к инверсному коду единицу.

При получении числа по его дополнительному коду, прежде всего, необходимо определить его знак. Если число окажется положительным, то просто перевести его код в десятичную систему счисления, иначе необходимо выполнить следующий алгоритм:

- 1) вычесть из кода числа 1;
- 2) инвертировать код;

3) перевести в десятичную систему счисления. Полученное число записать со знаком минус.

### Примеры выполнения заданий

1. Представьте числа  $37_{10}$  и  $-37_{10}$  в прямом коде в формате integer, затем запишите в шестнадцатеричном коде.

Переведем число в двоичную систему счисления:

$$37_{10} = 100101_2.$$

Занесем результат в разрядную сетку:

знак числа									младший разряд						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1

$$-37_{10} = -100101_2.$$

Занесем результат в разрядную сетку:

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Используем специальные приемы перевода  $D_2 \rightarrow D_{16}$ , получаем:

$$37_{10} = 25_{16}$$

2. Постройте дополнительный восьмиразрядный код для чисел  $-128_{10}$ ,  $-127_{10}$  и  $-0_{10}$ , затем запишите в шестнадцатеричном коде.

Число	-128	-127	-0
Прямой код	1000 0000	0111 1111	0000 0000
Инверсный код	0111 1111	1000 0000	1111 1111
Дополнит. Код	1000 0000	1000 0001	0000 0000
$D_{16}$	80	81	0

3. Укажите десятичные числа, имеющие следующее представление в дополнительном коде в формате integer:

а) 0000000000010111. Поскольку в старшем разряде записан ноль, то результат будет положительным. Это код числа 23.

б) 1111111111000000. Здесь записан код отрицательного числа.

Исполняем алгоритм:

$$1) 1111111111000000_2 - 1_2 = 1111111110111111_2;$$

$$2) 0000000001000000_2;$$

$$3) 1000000_2 = 1 \cdot 2^6 = 64_{10}. \text{ Ответ: } -64_{10}$$



## Целочисленная арифметика в дополнительных кодах в памяти компьютера

### Примеры выполнения заданий

1. Вычислите, используя дополнительный код представления 73–27:

$$73 - 27 = 73 + (-27) = 46_{10}$$

$$73_{10} = 64 + 8 + 1 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^0 = 1001001_2$$

01001001<sub>2</sub> – в формате short integer;

$$-27_{10} = -(16 + 8 + 2 + 1) = -(1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) = -11011_2$$

Вычисление дополнительного кода числа -11011<sub>2</sub>:

1) 00011011<sub>2</sub> – в формате short integer;

2) 11100100<sub>2</sub> – инвертированный код;

3) +       1 – прибавление 1;

4) 11100101<sub>2</sub> – результат.

Вычисление суммы чисел в дополнительном коде:

$$\begin{array}{r} 01001001_2 \\ + 11100101_2 \\ \hline 100101110_2 \end{array}$$

Проверка результата: учитывая формат short integer, отбрасываем старший разряд (переполнение разрядной сетки) и переводим в десятичное представление:  $101110_2 = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^5 = 46_{10}$

2. Вычислите, используя дополнительный код представления -35 – 17:

$$-35 - 17 = -35 + (-17) = -52_{10}$$

$$-35_{10} = -(32 + 2 + 1) = -(1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) = -100011_2$$

1) 00100011<sub>2</sub> – в формате short integer;

2) 11011100<sub>2</sub> – инвертированный код;

3) +       1 – прибавление 1;

4) 11011101<sub>2</sub> – результат.

$$-17_{10} = -(16 + 1) = -(1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^0) = -10001_2$$

1) 00010001<sub>2</sub> – в формате short integer;

2) 11101110<sub>2</sub> – инвертированный код;

3) +       1 – прибавление 1;

4) 11101111<sub>2</sub> – результат.

Вычисление суммы чисел в дополнительном коде:

$$\begin{array}{r} 11011101_2 \\ + 11101111_2 \\ \hline 111001100_2 \end{array}$$

Проверка результата сложения, путем выполнения операций в обратном порядке:

- 1)  $111001100_2$   

$$\begin{array}{r} 111001100_2 \\ - \quad \quad \quad 1 \\ \hline 111001011_2 \end{array}$$
 – вычитание 1;  
 2)  $000110100_2$  – инвертированный код;  
 3) перевод в десятичное представление:  
 $-110100_2 = -(1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5) = -52_{10}$

### Задания для самостоятельного выполнения

4.1. Представьте в прямом коде в формате integer целые десятичные числа:

- |           |        |         |         |          |          |
|-----------|--------|---------|---------|----------|----------|
| 0) a) 71; | b) 43; | c) 109; | d) 112; | e) -77;  | g) -203; |
| 1) a) 90; | b) 61; | c) 401; | d) 100; | e) -126; | g) -406; |
| 2) a) 56; | b) 43; | c) 204; | d) 111; | e) -95;  | g) -801; |
| 3) a) 67; | b) 29; | c) 406; | d) 141; | e) -107; | g) -704; |
| 4) a) 84; | b) 77; | c) 307; | d) 105; | e) -99;  | g) -602; |
| 5) a) 69; | b) 56; | c) 209; | d) 122; | e) -44;  | g) -409; |
| 6) a) 80; | b) 73; | c) 303; | d) 107; | e) -105; | g) -207; |
| 7) a) 76; | b) 54; | c) 106; | d) 131; | e) -115; | g) -109; |
| 8) a) 73; | b) 32; | c) 502; | d) 145; | e) -120; | g) -402; |
| 9) a) 62; | b) 45; | c) 308; | d) 120; | e) -76.  | g) -308. |

4.2. Укажите целые десятичные числа, представленные в прямом коде:

- |                 |              |                      |
|-----------------|--------------|----------------------|
| 0) a) 00100101; | b) 10011100; | c) 0010010000111001; |
| 1) a) 01101010; | b) 10110101; | c) 0001101010111000; |
| 2) a) 00001010; | b) 10101010; | c) 0000111010101010; |
| 3) a) 00100111; | b) 10001110; | c) 0000001111010111; |
| 4) a) 00101001; | b) 10010111; | c) 0000010100001001; |
| 5) a) 00001110; | b) 11100011; | c) 0000111000001110; |
| 6) a) 01001011; | b) 11011010; | c) 0000001110111011; |
| 7) a) 00100111; | b) 10101110; | c) 0000100011011000; |
| 8) a) 00011101; | b) 10101010; | c) 0000000111101100. |
| 9) a) 00101011; | b) 11101010; | c) 0000010101010101. |

4.3. Представьте в дополнительном коде целые десятичные числа:

- |           |         |         |          |          |          |
|-----------|---------|---------|----------|----------|----------|
| 0) a) 45; | b) 103; | c) 309; | d) -101; | e) -127; | g) -206; |
| 1) a) 73; | b) 120; | c) 401; | d) -100; | e) -123; | g) -407; |

- 2) a) 62; b) 207; c) 204; d) -111; e) -145; g) -801;  
 3) a) 75; b) 350; c) 406; d) -110; e) -117; g) -704;  
 4) a) 48; b) 201; c) 307; d) -101; e) -169; g) -602;  
 5) a) 90; b) 120; c) 209; d) -111; e) -144; g) -409;  
 6) a) 70; b) 230; c) 302; d) -101; e) -135; g) -511;  
 7) a) 61; b) 106; c) 155; d) -110; e) -112; g) -709;  
 8) a) 37; b) 220; c) 402; d) -100; e) -130; g) -607;  
 9) a) 29; b) 150; c) 301; d) -110; e) -176; g) -509.

**4.4. Укажите целые десятичные числа, представленные в дополнительном коде:**

- 0) a) 01100101; b) 10010100; c) 0010010000011001;  
 1) a) 01101010; b) 10110001; c) 0001101010101000;  
 2) a) 01001010; b) 10101000; c) 0000111010100010;  
 3) a) 00101111; b) 10001100; c) 0000001101010111;  
 4) a) 00111001; b) 10010101; c) 0000010000001001;  
 5) a) 00101110; b) 11100001; c) 0000110000001110;  
 6) a) 01011010; b) 11011000; c) 0000001010111011;  
 7) a) 00100011; b) 10101100; c) 0000100001011000;  
 8) a) 00011100; b) 10101000; c) 0000000110101100;  
 9) a) 00101010; b) 11100010; c) 0000010100010101.

**4.5. Вычислите, используя дополнительный код представления:**

- 0) a)  $31 - 23$ ; b)  $21 - 53$ ; c)  $-94 + 39$ ; d)  $-38 - 43$ ;  
 1) a)  $65 - 38$ ; b)  $34 - 48$ ; c)  $-80 + 26$ ; d)  $-56 - 62$ ;  
 2) a)  $72 - 44$ ; b)  $51 - 82$ ; c)  $-60 + 52$ ; d)  $-93 - 47$ ;  
 3) a)  $48 - 24$ ; b)  $27 - 60$ ; c)  $-79 + 37$ ; d)  $-86 - 25$ ;  
 4) a)  $80 - 43$ ; b)  $33 - 75$ ; c)  $-75 + 35$ ; d)  $-59 - 24$ ;  
 5) a)  $49 - 36$ ; b)  $26 - 61$ ; c)  $-60 + 25$ ; d)  $-42 - 38$ ;  
 6) a)  $35 - 29$ ; b)  $57 - 74$ ; c)  $-71 + 24$ ; d)  $-99 - 16$ ;  
 7) a)  $46 - 21$ ; b)  $50 - 83$ ; c)  $-83 + 58$ ; d)  $-51 - 32$ ;  
 8) a)  $57 - 35$ ; b)  $45 - 76$ ; c)  $-45 + 62$ ; d)  $-68 - 40$ ;  
 9) a)  $66 - 30$ ; b)  $51 - 67$ ; c)  $-95 + 15$ ; d)  $-77 - 54$ .

**4.6. Вычислите, используя дополнительный код представления**

- 0) a)  $35 + (74 - 25)$ ; b)  $70 - (41 + 15)$ ; c)  $61 - (54 - 16)$ ; d)  $-15 + (11 - 23)$ ;  
 1) a)  $46 - (85 + 22)$ ; b)  $64 + (51 - 17)$ ; c)  $46 - (31 - 12)$ ; d)  $-16 + (15 - 42)$ ;

- 2) a)  $24-(15+43)$ ; b)  $45+(82-54)$ ; c)  $64-(27-21)$ ; d)  $-14+(16-27)$ ;  
 3) a)  $64+(43-35)$ ; b)  $78-(37+26)$ ; c)  $70-(82-15)$ ; d)  $-17+(20-36)$ ;  
 4) a)  $32-(77+44)$ ; b)  $32-(77+44)$ ; c)  $42-(51-14)$ ; d)  $-12+(17-41)$ ;  
 5) a)  $50-(35+23)$ ; b)  $27+(46-35)$ ; c)  $82-(25-13)$ ; d)  $-20+(18-23)$ ;  
 6) a)  $35-(12+45)$ ; b)  $53+(49-45)$ ; c)  $76-(62-17)$ ; d)  $-13+(12-45)$ ;  
 7) a)  $45+(25-44)$ ; b)  $45-(51+34)$ ; c)  $90-(32-11)$ ; d)  $-21+(13-24)$ ;  
 8) a)  $75-(66+21)$ ; b)  $39+(62-18)$ ; c)  $87-(26-19)$ ; d)  $-18+(19-51)$ ;  
 9) a)  $74-(29+27)$ ; b)  $47+(60-32)$ ; c)  $50-(33-18)$ ; d)  $-19+(14-25)$ .

### Тема 5. Представление дробных чисел в памяти ПК

Любое действительное число может быть представлено в *формате с плавающей запятой (точкой)* как  $A = \pm m \cdot E^{\pm p}$ , опираясь на *нормализованную форму* записи числа:

где  $\pm m$  – мантисса числа,

$E$  – основание системы счисления,

$\pm p$  – порядок.

Числа могут иметь много форм записи. Например,

$$3,14_{10} = 31,4 \cdot 10^{-1} = 314 \cdot 10^{-2} = 3140 \cdot 10^{-3} = \dots = 0,314 \cdot 10^1 = \dots$$

Для однозначного представления чисел мантиссу нормализуют, т.е. накладывают ограничение:  $1/E < m < 1$ , таким образом получают *нормальную дробь*. Таким образом, нормализованная мантисса содержит хотя бы одну значащую цифру после запятой, отличную от нуля. В этом случае нет смысла хранить 0 целых, поэтому 0 «скрывают».

В целях экономии разряда, содержащего знак порядка числа  $x$ , вычисляют характеристику ( $p_x$ ), равную сумме порядка и смещения. В разных стандартах представление смещения определяется по-разному:  $64$  ( $64_{10} = 40_{16}$ ) или  $127$  ( $127_{10} = 01111111_2$ ).

Чаще всего используется стандарт, по которому для представления числа используются 32 разряда. Он используется практически на всех ПК. Этот стандарт предусматривает: старший разряд - для знака мантиссы числа (0 – “+”, 1 – “-“), 7 битов - для характеристики и 24 бита - для мантиссы.

Если в разрядной сетке мантиссы остаются свободные разряды, то они заполняются, либо нулями, либо периодом дроби, если он есть.

Персональный компьютер IBM PC позволяет работать со следующими действительными типами (диапазон значений указан по абсолютной величине):

<i>Тип</i>	<i>Диапазон</i>	<i>Мантисса</i>	<i>Объем</i>
<i>Real</i>	$2,9 \cdot 10^{-39} \dots 1,7 \cdot 10^{38}$	11–12	6
<i>Single</i>	$1,5 \cdot 10^{-45} \dots 3,4 \cdot 10^{38}$	7–8	4
<i>Double</i>	$5,0 \cdot 10^{-324} \dots 1,7 \cdot 10^{308}$	15–16	8
<i>Extended</i>	$3,4 \cdot 10^{-4932} \dots 1,1 \cdot 10^{4932}$	19–20	10

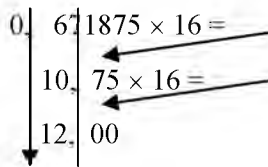
Во всех этих стандартах представления первый байт остается постоянным, изменяется только область, отведенная под мантиссу.

### Примеры выполнения заданий

1. Представьте дробное число  $x$ , равное  $46,671875_{10}$  в форме с плавающей точкой в 32-разрядном формате.

а) переводим число  $46,671875$  из  $D_{10} \rightarrow D_{16}$ :

$$46_{10} = 2 \cdot 16^1 + 14 \cdot 16^0 = 2E_{16}$$



$$46,671875_{10} = 2E,AC_{16}$$

в) нормализуем дробь:

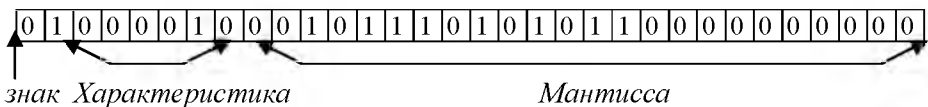
$m = 0,2EAC_{16}$ , где 0 - скрытый разряд;

с) порядок числа  $p = 2$ ;

д) вычисляем характеристику числа:  $p_x = 40 + 2 = 42_{16}$ ,

где  $40_{16}$  – смещение порядка;

е) заполняем разрядную сетку в 32-разрядном формате, заменяя каждый 16-й знак двоичной тетрадой:



2. Укажите целые десятичные числа, представленные в прямом коде:

a)

0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

$$1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^7 = 16 + 32 + 128 = 176_{10}$$

b)

1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

$$-(1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^{10}) = -(2 + 64 + 256 + 1024) = -1346_{10}$$

3. Укажите целые десятичные числа, представленные в доп. коде:

a)

0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

$$1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7 = 2 + 16 + 32 + 64 + 128 = 242_{10}$$

b)

1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Т.к. число отрицательное, то вычитаем 1:

1101110101010010

Инвертирует разряды: 0010001010101101

$$-(1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^9 + 2^{13}) =$$

$$= -(1 + 4 + 8 + 32 + 128 + 512 + 4096) = -4781_{10}$$

### Задания для самостоятельного выполнения

5.1. Представьте в форме с плавающей точкой в 32-разрядном формате десятичные числа:

- 0) a) 29,06; b) 45,006; c) -440,25; d) 60,4; e) -104,15; g) 608,51;  
 1) a) 41,05; b) 94,003; c) -270,45; d) 29,1; e) -105,14; g) 301,42;  
 2) a) 73,02; b) 27,009; c) -170,29; d) 56,8; e) -103,12; g) 405,13;  
 3) a) 62,01; b) 52,008; c) -340,55; d) 70,2; e) -102,13; g) 504,46;  
 4) a) 56,02; b) 81,002; c) -250,88; d) 35,1; e) -106,14; g) 602,24;  
 5) a) 45,04; b) 34,006; c) -130,36; d) 45,4; e) -103,11; g) 803,32;  
 6) a) 26,09; b) 58,004; c) -180,25; d) 57,8; e) -101,16; g) 701,27;  
 7) a) 38,08; b) 69,005; c) -190,92; d) 36,9; e) -107,19; g) 902,35;  
 8) a) 43,07; b) 81,007; c) -210,44; d) 81,2; e) -108,17; g) 209,48;  
 9) a) 81,01; b) 90,001; c) -160,75; d) 45,6; e) -109,18; g) 508,26;

5.2. Укажите шестнадцатеричные числа, представленные в 32-разрядном формате с плавающей точкой:

0)

0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

1)

1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



## Тема 6. Представление алфавитно-цифровых и графических данных в памяти ПК

*Кодирование* - это процесс установления взаимно однозначного соответствия элементам и словам одного алфавита элементов и слов другого алфавита. *Кодом* называется правило, по которому сопоставляются различные алфавиты и слова.

Для кодирования символов достаточно одного байта (8 разрядов). При этом можно представить 256 символов (с десятичными кодами от 0 до 255). Набор символов персональных ЭВМ IBM PC чаще всего является расширением кода ASCII (*American Standard Code for Information Interchange* — стандартный американский код для обмена информацией).

ASCII включает две таблицы кодирования – базовую и альтернативную. В базовой таблице каждому символу поставлен в соответствие шестнадцатеричный код - число в диапазоне от 0 до 127. В альтернативной таблице каждому символу поставлен в соответствие десятичный код - число в диапазоне от 128 до 255 (см. приложение 1, 2). Первые 32 кода (управляющие коды) базовой таблицы отданы производителям аппаратных средств.

Большие наборы байтов удобнее измерять более крупными единицами:

1024 байт = 1 Килобайт (Кб);    1024 Мб = 1 Гигабайт (Гб);  
1024 Кб = 1 Мегабайт (Мб);    1024 Гб = 1 Терабайт (Тб).

В текстовом режиме каждому символу отводится 2 байта видеопамяти: 1 - код символа, 2 - атрибуты (яркость, цвет, мерцание). В графическом режиме каждой точке (пикселю) отводится от 1 бита до нескольких байтов видеопамяти в зависимости от использования в данном видеорежиме набора цветов.

Выбор конкретного видеорежима определяется типом видеоадаптера и программным обеспечением. Основные типы видеоадаптеров:

- *MDA* - текстовый режим, 2 цвета;
- *CGA* - текстовый и графический режимы, до 4-х цветов;
- *Hercules* - текстовый и графический режимы, 2 цвета;
- *EGA* - текстовый и графический режимы, 16 цветов;
- *VGA* - текстовый и граф. режимы, 16 цветов из палитры 64 цв;
- *SVGA* - текстовый и графический режимы, до 16 млн. цветов.



Фактически видеопамять служит для хранения информации, отображаемой на экране монитора. Для хранения характеристик каждого пикселя необходимо разное количество видеопамати в зависимости от режима набора цветов:

в монохромном режиме – 1 бит; в цветном режиме (16 цветов – 4 бита; 256 цветов – 1 байт; 16 млн. цветов – 3 байта).

Существуют различные системы кодирования для представления цветных изображений:

**RGB** (Red, Green, Blue), **CMYK** (Cyan, Magenta, Yellow, blacK) и др.

Такие режимы представления цветной графики (кодирование одной точки - 24 разряда) называются *полноцветными* (True Color).

### Примеры выполнения заданий

1. Представьте словосочетание «IBM PC» в памяти ПК:

**I** -  $49_{16} = 01001001_2$

**B** -  $42_{16} = 01000010_2$

**M** -  $4D_{16} = 01001101_2$

**пробел SP** -  $20_{16} = 00100000_2$

**P** -  $50_{16} = 01010000_2$

**C** -  $43_{16} = 01000011_2$

Ответ: 01001001 01000010 01001101 00100000 01010000 01000011

2. Представьте слово «Логика» в памяти ПК:

**Л** -  $139_{10} = 128 + 8 + 2 + 1 = 2^7 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 10001011_2$

**о** -  $174_{10} = 128 + 32 + 8 + 4 + 2 = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 10101110_2$

**г** -  $163_{10} = 128 + 32 + 2 + 1 = 2^7 + 2^5 + 2^1 + 2^0 = 10100011_2$

**и** -  $168_{10} = 128 + 32 + 8 = 2^7 + 2^5 + 2^3 = 10101000_2$

**к** -  $170_{10} = 128 + 32 + 8 + 2 = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^1 = 10101010_2$

**а** -  $160_{10} = 128 + 32 = 2^7 + 2^5 = 10100000_2$

Ответ: 10001011 10101110 10100011 10101000 10101010 10100000

3. Рассчитайте объём видеопамати для VGA-монитора с экраном разрешимостью 640 x 480 точек в байтах и килобайтах.

1) подсчитаем количество пикселей для данного экрана:

$$640 \times 480 = 307\,200 \text{ пиксель;}$$

2) рассчитаем объём видеопамати:

$$307\,200 \times 4 = 1\,228\,800 \text{ бит;}$$

3)  $1\,228\,800 : 8 = 153\,600 \text{ байт;}$

4)  $153\,600 : 1024 = 150 \text{ Кб.}$

### **Задания для самостоятельного выполнения**

#### **6.1. Представьте словосочетания в памяти ПК:**

- |                 |                  |                          |
|-----------------|------------------|--------------------------|
| 0) a) purple;   | b) dark salmon;  | c) Plug and play;        |
| 1) a) orange;   | b) honey dew;    | c) Flash memory;         |
| 2) a) silver;   | b) cadet blue;   | c) Biographical memoirs; |
| 3) a) fuchsia;  | b) burly wood;   | c) Boolean's function;   |
| 4) a) indigo;   | b) chocolate;    | c) User interface;       |
| 5) a) orchid;   | b) forest green; | c) Texas Instruments;    |
| 6) a) crimson;  | b) dark gray;    | c) Computer Arithmetic;  |
| 7) a) violet;   | b) dark red;     | c) Complicated saying;   |
| 8) a) magenta;  | b) hot pink;     | c) Random access;        |
| 9) a) lavender; | b) golden rod;   | c) Garrett Air search.   |

#### **6.2. Представьте словосочетания в памяти ПК:**

- |                |  |
|----------------|--|
| 0) a) Формат;  | b) Аппаратные и программные средства;    |
| 1) a) Сектор;  | b) Программа начальной загрузки;         |
| 2) a) Память;  | b) Устройство и функционирование ПК;     |
| 3) a) Точка;   | b) Нормальная и совершенная форма;       |
| 4) a) Базис;   | b) Перевод числовой информации;          |
| 5) a) Дробь;   | b) Простые и составные высказывания;     |
| 6) a) Запись;  | b) Логические константы и переменные;    |
| 7) a) Кластер; | b) Основная и дополнительная литература; |
| 8) a) Дорожка; | b) Экспоненциальная форма записи;        |
| 9) a) Цилиндр; | b) Простые и сложные операторы.          |

#### **6.3. Рассчитайте объём видеопамати, необходимый для хранения в видеопамати графического изображения в байтах, Кб и Мб:**

- 0) EGA - монитора с экраном разрешимостью 320 x 200;
- 1) MDA - монитора с экраном разрешимостью 640 x 480;
- 2) SVGA - монитора с экраном разрешимостью 1024 x 768;
- 3) Hercules - монитора с экраном разрешимостью 320 x 200;
- 4) SVGA - монитора с экраном разрешимостью 800 x 600;
- 5) MDA - монитора с экраном разрешимостью 800 x 600;
- 6) VGA - монитора с экраном разрешимостью 1024 x 768;
- 7) EGA - монитора с экраном разрешимостью 640 x 480;
- 8) VGA - монитора с экраном разрешимостью 640 x 480;
- 9) EGA - монитора с экраном разрешимостью 800 x 600;

### Контрольные вопросы по теме «Математические основы информатики»

- А** Какие типы систем счисления Вы знаете?
- Б** Почему для хранения символа требуется 1 байт?
- В** В чем сходство и различие понятий: данные и информатика?
- Г** Какие Вы знаете определения информации?
- Д** Как представляются целые числа в памяти ПК?
- Е** Какие операции по обработке информации Вы знаете?
- Ё** Что такое информационные ресурсы и технологии?
- Ж** Что такое информатизация общества?
- З** Как представляется графическая информация в памяти ПК?
- И** Какие этапы развития информационной технологии Вы знаете?
- Й** Что такое полиномиальное представление?
- К** Почему значениями бита могут быть только цифры 0 или 1?
- Л** Каковы цели, задачи и содержание информатики?
- М** Какие существуют форматы представления дробных чисел в ПК?
- Н** Как называется наименьшая единица адресации данных в ПК?
- О** В чем различие традиционных и нетрадиционных систем счисления?
- П** Что такое система счисления?
- Р** Каковы основные свойства информации?
- С** Почему в 1 байте 8 бит?
- Т** Как представляется аудиоинформация в памяти ПК?
- У** По каким законам измеряется количество информации?
- Ф** В каком виде может существовать информация?
- Х** В чем различие непозиционных и позиционных систем счисления?
- Ц** Что такое кодирование информации?
- Ч** Сколько байт требуется для представления целых и дробных чисел?
- Ш** Какие таблицы кодирования информации Вы знаете?
- Щ** Какие существуют форматы представления целых чисел в ПК?
- Ъ** Как определяются позиционные системы счисления?
- Ы** На каких науках базируется информатика?
- Ь** Как представляется графическая информация в памяти ПК?
- Э** Какие единицы измерения информации существуют?
- Ю** Как представляется текстовая информация в памяти ПК?
- Я** Какие разделы содержит информатика?

10 вопросов для контрольного опроса выбираются по буквам фамилии, имени, отчества в именительном падеже слева направо без повторения.

Например, ИВАНОВ ОЛЕГ ПЕТРОВИЧ отвечает на вопросы:

И, В, А, Н, О, Л, Е, Г, П, Т.

## Глава 2. Множества, отношения и отображения

### Тема 1. Элементы теории множеств

#### Способы задания множеств

*Множество* – это совокупность элементов, объединенных общим свойством. Имеется два различных способа задания множеств:

##### **1. Перечислением элементов множества.**

Например, множество  $M = \{x, y, z\}$  состоит из трёх элементов, порядок перечисления которых не имеет значения, т.е.  $\{x, y, z\} = \{y, x, z\} = \dots$

##### **2. Описанием элементов множеств:**

- *описанием характеристических свойств*, объединяющих элементы в виде уравнений, диаграмм Эйлера-Венна, таблиц, схем.

Например,  $M = \{x^2 \in \mathbb{N}; x - \text{простое число}\}$ .

- *описанием множеств, порожденных процедурами над элементами*, означает указание алгоритма порождения элементов этого множества.

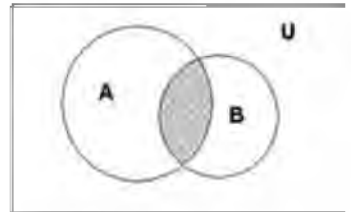
Например, подмножество  $M$  всех нечетных натуральных чисел с помощью порождающей процедуры имеет вид:  $M = \{x \in \mathbb{N}; x = 1 + 2n, n \in \mathbb{N}\}$ .

#### Операции над множествами

Рассмотрим выполнение операций над множествами на примере: пусть заданы множества  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 3, 5, 7\}$ . Найдите множества:  $C = A \cap B$ ,  $D = A \cup B$ ,  $E = A \setminus B$ ,  $F = U \setminus A$ ,  $G = A \Delta B$ .

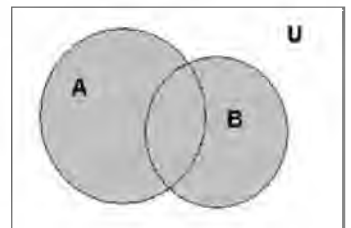
*Пересечением* (произведением) двух множеств называется множество  $C$ , состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множествам  $A$  и  $B$  одновременно. Если  $A$  и  $B$  непустые множества, пересечение которых пусто ( $\emptyset$ ), то их называют *непересекающимися множествами*.

Пример:  $C = A \cap B$ .  $C = \{1, 3\}$ .



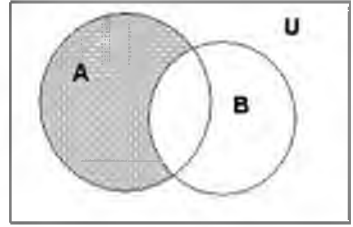
*Объединением* (суммой) двух множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $D$ , состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств  $A$  или  $B$  (или тому и другому вместе).

Пример:  $D = A \cup B$ .  $D = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ .



*Разностью* множеств  $A$  и  $B$  называется такое множество  $E$ , которое состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству  $A$ , но не принадлежат множеству  $B$ .

Пример:  $E = A \setminus B$ .  $E = \{2\}$ .



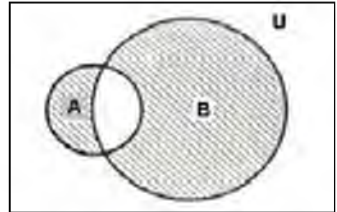
*Дополнением* множества  $A$  до универсального множества  $U$  называется множество  $F$ , равное разности  $U \setminus A$  или  $\overline{A}$ .

Пример:  $F = U \setminus A$ .  $F = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .



*Симметрической разностью* двух множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $G = A \cup B \setminus A \cap B$ .

Пример:  $G = A \Delta B$ .  $G = \{2, 5, 7\}$ .



### Формула включений и исключений

Эта формула позволяет определить *мощность* (количество элементов множества) объединения конечного числа *конечных множеств* (множеств, у которых мощность множества совпадает с количеством элементов), которые могут пересекаться друг с другом.

Формула для двух множеств  $A$  и  $B$ :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Формула для трех множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$ :

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C),$$

где  $n(Z)$  – мощность множества  $Z$ .

### Примеры выполнения заданий

1. Заданы множества:  $A = \{-1, 3, 5, 7\}$ ,  $B = \{1, -2, 3, 4, 5\}$ ,  $C = \{-1, -2, 4, 5\}$ .

Задайте списками множества:  $D = C \setminus A \cap B \cap C$ ,  $E = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ .

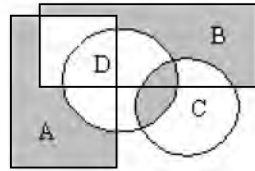
$F = A \cup (B \Delta C)$ .

Решение:  $D = \{-1, -2, 4, 5\} \setminus \{5\} = \{-1, -2, 4\}$ ,  $E = \{3, 7\} \cup \{1, 3\} = \{1, 3, 7\}$ ,

$F = \{-1, 3, 5, 7\} \cup (\{-2, -1, 1, 3, 4, 5\} \setminus \{-2, 4, 5\}) = \{-1, 3, 5, 7\} \cup (\{-1, 1, 3\}) = \{-1, 1, 3, 5, 7\}$ .

2. Представьте заштрихованные области формулами теории множеств

Решение:  $D = (A \Delta B) \mid (D \Delta C)$

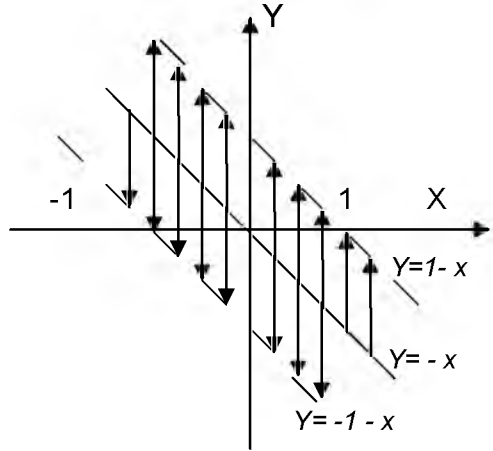


3. Пусть  $(x, y)$  - координаты точек плоскости. Укажите штриховкой множество:  
 $A = \{(x, y) \mid |x + y| < 1\}$ .

Решение:

$$|x+y| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 0 \\ x+y < 1 \\ x+y < 0 \\ -(x+y) < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -x \\ y < 1-x \\ y < -x \\ y > -1-x \end{cases}$$



### Задания для самостоятельного выполнения

1.1. Задайте множество  $A$  перечислением его элементов:

- 0)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 6x + 5) \cdot (x^2 - x - 12) = 0\}$  1)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 5x + 6) \cdot (x^2 + x - 20) = 0\}$   
 2)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 5x + 4) \cdot (x^2 - x - 6) = 0\}$  3)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + 4x - 5) \cdot (x^2 - 7x + 12) = 0\}$   
 4)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + 3x - 4) \cdot (x^2 + x - 12) = 0\}$  5)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 5x - 6) \cdot (x^2 - x - 6) = 0\}$   
 6)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + x - 2) \cdot (x^2 - 7x + 6) = 0\}$  7)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 3x - 4) \cdot (x^2 - 9x + 20) = 0\}$   
 8)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 3x + 2) \cdot (x^2 - 4x - 5) = 0\}$  9)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - x - 2) \cdot (x^2 - x - 20) = 0\}$

1.2. Заданы множества:  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $A = \{1, 3, 8, 9\}$ ,  $B = \{3, 4, 5, 8\}$ ,  $C = \{1, 4, 8, 9\}$ . Задайте списками множества:  $D, E, F, G$ :

- 0) a)  $D = A \mid B \cap C$ ; b)  $E = (A \Delta C) \cap B$ ; c)  $F = (A \Delta B) \mid C$ ; d)  $G = U \setminus A \cup B$ ;  
 1) a)  $D = A \cup B \mid C$ ; b)  $E = A \cap C \Delta B$ ; c)  $F = A \mid B \Delta C$ ; d)  $G = U \Delta (B \setminus A)$ ;  
 2) a)  $D = A \cup (C \setminus B)$ ; b)  $E = (C \cap B) \Delta A$ ; c)  $F = (B \Delta C) \mid A$ ; d)  $G = U \setminus B \cap C$ ;

- 3) а)  $D = A \cap (B \mid C)$ ; б)  $E = A \cup (B \Delta C)$ ; в)  $F = (A \mid C) \Delta B$ ; д)  $G = (U \Delta C) \mid B$ ;  
 4) а)  $D = (A \cup B) \setminus C$ ; б)  $E = A \cup B \Delta C$ ; в)  $F = A \Delta B \mid C$ ; д)  $G = U \cap B \setminus C$ ;  
 5) а)  $D = A \cup C \mid B$ ; б)  $E = (A \Delta B) \cap C$ ; в)  $F = A \mid (B \Delta C)$ ; д)  $G = (U \setminus A) \cup C$ ;  
 6) а)  $D = (A \cup C) \setminus B$ ; б)  $E = (C \cup B) \Delta A$ ; в)  $F = (C \Delta A) \mid B$ ; д)  $G = U \Delta B \setminus C$ ;  
 7) а)  $D = (A \mid B) \cap C$ ; б)  $E = (A \cap C) \Delta B$ ; в)  $F = C \Delta A \mid B$ ; д)  $G = (U \setminus C) \cap A$ ;  
 8) а)  $D = B \cup C \mid A$ ; б)  $E = A \Delta B \cup C$ ; в)  $F = B \mid (A \Delta C)$ ; д)  $G = U \setminus B \Delta C$ ;  
 9) а)  $D = A \cap B \mid C$ ; б)  $E = A \cup B \Delta C$ ; в)  $F = C \mid (A \Delta B)$ ; д)  $G = U \cup A \setminus B$ .

**1.3.** Пусть  $A$ ,  $B$  и  $C$  – множества точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям. Изобразите на плоскости множество  $D$ , полученное их множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$  по формуле:

№ варианта	Условия		№ варианта	Условия	
0	A	$y - x^2 - 1 \leq 0$	5	A	$x^2 + y - 6 \leq 0$
	B	$y - x^2 + 3 \geq 0$		B	$ x  > 2;  y  > 2$
	C	$x > 0$		C	$x < y$
	$D = A \cap B \mid C$			$D = A \cap B \cap C$	
1	A	$x^2 + y^2 - 9 \leq 0$	6	A	$x^2 + y - 5 \leq 0$
	B	$ y  \leq 4; -6 \leq x \leq 1$		B	$x^2 + y^2 - 6y \leq 0$
	C	$y < 0$		C	$x > 0$
	$D = (A \Delta B) \mid C$			$D = A \mid B \cup C$	
2	A	$x - y > 0$	7	A	$x < y + 3$
	B	$x + y < 0$		B	$x > y - 3$
	C	$x^2 + y^2 \leq 4$		C	$ x  < 5;  y  < 2$
	$D = (A \Delta B) \cup C$			$D = A \cap B \mid C$	
3	A	$x^2 + y^2 - 6y \leq 0$	8	A	$x^2 - y + 4 \geq 0$
	B	$y + x^2 + 1 \geq 0$		B	$x^2 + y^2 \leq 1$
	C	$ x  \leq 6; -3 \leq y \leq -2$		C	$ x  \leq 2; -4 \leq y \leq 0$
	$D = A \cup B \Delta C$			$D = A \cup B \mid C$	
4	A	$x^2 - y - 2 \geq 0$	9	A	$x^2 + y^2 \leq 25$
	B	$x^2 - y + 4 \geq 0$		B	$ x  \leq 4;  y  \leq 4$
	C	$y > 1$		C	$y > 0$
	$D = A \cap B \mid C$			$D = A \cap (B \mid C)$	

1.4. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна множества, если множества  $A, B$  и  $C$  имеют общие точки:

- 0) а)  $U \mid \overline{A \cup B \cup C}$ ; б)  $\overline{A} \cap B \mid C$ ; 1) а)  $C \cup A \mid \overline{B}$ ; б)  $(A \mid B) \cup C$ ;  
 2) а)  $(A \Delta B) \mid C$ ; б)  $\overline{A \cup B} \cap C$ ; 3) а)  $A \cap B \mid C$ ; б)  $A \cap B \cup C \mid A$ ;  
 4) а)  $\overline{A \cup B} \mid C$ ; б)  $(B \mid A) \cap C$ ; 5) а)  $\overline{A} \cap \overline{B} \mid C$ ; б)  $\overline{A \cap B} \mid C$ ;  
 6) а)  $C \mid A \cup B$ ; б)  $\overline{A} \cap (B \Delta C)$ ; 7) а)  $U \mid \overline{A \cap B \cap C}$ ; б)  $C \cap A \mid \overline{B}$ ;  
 8) а)  $A \mid (B \Delta C)$ ; б)  $C \mid A \cap B$ ; 9) а)  $(A \cup B) \cap (B \Delta C)$ ; б)  $A \cup B \mid C$ ;

1.5. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна множества  $D, E, F$ , если множества  $A, B$  и  $C$  имеют общие точки:

- 0) а)  $D = B \cup \overline{C}$   
 $E = B \cap C \cup (\overline{C} \setminus A \cap B)$   
 $F = \overline{B} \cap \overline{C} \cup B \cap (C \setminus A)$   
 б)  $D = \overline{A} \cup C \cup B$   
 $E = A \cap C \cup (B \setminus C) \cup \overline{A \cup B}$   
 $F = (C \Delta B) \cup (B \cap A) \cup \overline{C \cap B}$
- 1) а)  $D = A \cup C$   
 $E = (A \Delta C) \cup (B \cap A)$   
 $F = (A \setminus C) \cup B \cap C \cup (C \setminus A)$   
 б)  $D = \overline{A} \cup \overline{C} \cup B$   
 $E = \overline{A \Delta B} \cup (A \setminus C)$   
 $F = (\overline{C \cap A} \setminus B) \cup A \cap B$
- 2) а)  $D = A \cup \overline{C}$   
 $E = \overline{A \Delta C} \cup A \cap B$   
 $F = A \cap C \cup ((A \setminus B) \setminus C)$   
 б)  $D = A \cup B \cup \overline{C}$   
 $E = B \cap C \cup (B \setminus A) \cup \overline{A \cup C}$   
 $F = C \cap B \cup \overline{A \cup C}$
- 3) а)  $D = \overline{A} \cup C$   
 $E = B \cap C \cup \overline{A \cup C}$   
 $F = (B \cup \overline{C} \setminus A) \cup B \cap C$   
 б)  $D = (B \setminus A) \cup \overline{C}$   
 $E = \overline{C \cup B} \cup (B \setminus A)$   
 $F = \overline{C} \cap \overline{B} \cup ((B \setminus C) \setminus A)$
- 4) а)  $D = \overline{A} \cup B$   
 $E = \overline{A \Delta C} \cup C \cap (B \setminus A)$   
 $F = B \cap A \cup ((C \setminus B) \setminus A)$   
 б)  $D = A \cup (A \setminus B)$   
 $E = \overline{A \cup B} \cup \overline{C} \cap A$   
 $F = (\overline{C \cap A} \setminus B) \cup (A \setminus C)$
- 5) а)  $D = A \cup \overline{C}$   
 $E = (\overline{C \cap B} \setminus A) \cup (C \setminus B)$   
 $F = \overline{A \cup C} \cup C \cap \overline{B}$   
 б)  $D = A \cup \overline{B} \cup C$   
 $E = A \cap B \cup (A \setminus C) \cup \overline{C \cup B}$   
 $F = \overline{C} \cap \overline{B} \cup B \cap A$
- 6) а)  $D = A \cup \overline{B}$   
 б)  $D = (A \setminus C) \cup \overline{B}$



$$E = \overline{A \cup B} \cup C \cap A$$

$$F = \overline{A} \cup C \setminus B \cup C \cap A$$

$$7) \ a) D = \overline{A} \cup B$$

$$E = \overline{A \Delta B} \cup C \cap B$$

$$F = B \cap A \cup ((B \setminus C) \setminus A)$$

$$8) \ a) D = B \cup C$$

$$E = (C \Delta B) \cap B \cup C \cap (A \cup B)$$

$$F = B \cap A \cup B \cap C$$

$$9) \ a) D = A \cup B$$

$$E = (A \Delta B) \cup (C \cap B)$$

$$F = (B \setminus A) \cup A \cap C \cup (A \setminus B)$$

$$E = \overline{A} \cap \overline{B} \cup ((A \setminus B) \setminus C)$$

$$F = (A \setminus C) \cup \overline{A \cup B}$$

$$b) D = \overline{A} \cup (A \setminus B)$$

$$E = (A \Delta B) \cup (C \setminus A)$$

$$F = (A \cup C \setminus B) \cup (C \cup B \setminus A)$$

$$b) D = A \cup \overline{B} \cup \overline{C}$$

$$E = \overline{A \Delta C} \cup (C \setminus B)$$

$$F = (\overline{C \cup B} \setminus A) \cup C \cap A$$

$$b) D = A \cup B \cup \overline{C}$$

$$E = C \cap B \cup (A \setminus B) \cup \overline{A \cup C}$$

$$F = (A \Delta B) \cup (C \cap A) \cup \overline{B \cup C}$$

**1.6.** Пусть  $A$  и  $B$  – множества точек плоскости, координаты которых удовлетворяют заданным условиям. Изобразите на плоскости множества  $A \cap B$ ,  $A \cup B$  и  $A \setminus B$ , полученных их множеств  $A$  и  $B$ :

$$0) \ A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\};$$

$$B = \{(x, y) \mid |x + 2y| < 3\}$$

$$2) \ A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 9\};$$

$$B = \{(x, y) \mid |4y + x| > 1\};$$

$$4) \ A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\};$$

$$B = \{(x, y) \mid |3x + y| < 6\};$$

$$6) \ A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 36\};$$

$$B = \{(x, y) \mid |x + y| \geq 2\};$$

$$8) \ A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 16\};$$

$$B = \{(x, y) \mid |x - 3y| > 5\};$$

$$1) \ A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\};$$

$$B = \{(x, y) \mid |4x - y| \leq 2\};$$

$$3) \ A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 25\};$$

$$B = \{(x, y) \mid |2x + 2y| > 5\};$$

$$5) \ A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 16\};$$

$$B = \{(x, y) \mid |x + 3| \geq 1\};$$

$$7) \ A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 9\};$$

$$B = \{(x, y) \mid |2x - y| \leq 1\};$$

$$9) \ A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 36\};$$

$$B = \{(x, y) \mid |x + 4y| < 8\};$$

**1.7.** Вычислите, используя формулу включений и исключений:

0) В классе 25 учащихся, 10 из них играют в волейбол, 12 играют в футбол, а 5 занимаются и тем и другим. Есть ли в классе ученики, равнодушные к волейболу и к футболу?

- 1) В поход ходили 80% учеников класса, а на экскурсии было 60% класса, причем каждый был в походе или на экскурсии. Сколько процентов класса были и там, и там?
- 2) Из 23 учащихся класса 13 посещают математический кружок, 8 – физический, 11 – не посещают кружки. Сколько учеников посещают и математический и физический кружки?
- 3) Художник за месяц работы написал 34 картины. На 15 из них есть лес, на 25 – река, а на 13 – и то, и другое, на остальных картинах – не пойми что. Сколько картин изображают не пойми что?
- 4) На зачете по геометрии были предложены две задачи: по планиметрии и стереометрии. Из 22 учеников задачу по планиметрии решили – 17, а по стереометрии – 14 человек. При этом задачи по планиметрии и стереометрии решили 16 человек. Существуют ли ученики, не решившие ни одной задачи?
- 5) В итоговом отчете по смотру худ. самодеятельности: в смотре приняли участие 22 студента 1 курса: из них 13 – танцевали, 8 – пели, некоторые и танцевали и пели. Почему отчет не приняли?
- 6) В группе детского сада 26 детей, 12 из них любят шоколадные конфеты, 9 – любят шоколадные конфеты и мармелад. Сколько детей любят только мармелад?
- 7) Сколько мальчиков в классе, если баскетболом занимаются 8 человек, футболом – 6, баскетболом и футболом – 5, а 3 ничем не занимаются?
- 8) В цирк ходили 70% учеников класса, а 30% класса были в цирке и в театре. Сколько учеников ходило в театр, в процентах?
- 9) Сколько девочек в классе, если вязанием занимаются 11 человек, шитьем – 8, вязанием и шитьем – 10, а 5- не занимаются ничем?

### ***1.8. Вычислите, используя формулу включений и исключений:***

- 0) За время отпуска 12 дней шел дождь, 8 дней дул сильный ветер, а 4 дня было холодно. Сколько дней была плохая погода, если: дождливых и ветреных дней было 5; дождливых и холодных – 3 дня; ветреных и холодных – 2 дня; дождливых, ветреных и холодных – 1 день.
- 1) На вступительном экзамене по математике были предложены три задачи: по алгебре, планиметрии и стереометрии. Из 920 абитуриентов задачу по алгебре решили 800, по планиметрии — 700, а по стереометрии — 600 абитуриентов. При этом задачи по алгебре и планиметрии решили 600 абитуриентов, по алгебре и стереометрии — 500, по планиметрии и стереометрии — 400. Ни одной задачи не реши-

ли 70 абитуриентов. Существуют ли абитуриенты, решившие все задачи?

2) На олимпийских играх наши спортсмены завоевали 96 медалей, из них 65 золотых и бронзовых, а золотых и серебряных 61. Сколько было золотых, серебряных и бронзовых медалей в отдельности?

3) Среди 100 деталей прошли обработку на 1-м станке 42 штуки, на 2-м - 30 штук, а на 3-м - 28. Причем на 1-ом и 2-ом станках обработано 5 деталей, на 1-ом и 3-ем - 10 деталей, на 2-ом и 3-ем - 8 деталей, на всех трех станках обработано 3 детали. Сколько деталей обработано на первом станке и сколько деталей не обработано ни на одном из станков?

4) Из 35 учащихся класса 12 посещают математический кружок, 9 – физический, 10 – литературный. Из них 5 посещают математический и физический, 4 – математический и литературный, 3 – физический и литературный. 7 - не посещают кружки. Сколько учеников посещают все кружки?

5) В первом классе читать умеют 12 учеников, считать – 8, писать – 9; читать и писать – 4, читать и считать – 5, писать и считать – 3; читать, писать и считать – 2; 6 учеников до сих пор ничему не научились. Сколько учеников в классе?

6) В классе 25 учащихся, 7 из них занимаются баскетболом, 8 волейболом, 6 футболом. Причем 5 занимаются баскетболом и волейболом, 6 баскетболом и футболом, 3 волейболом и футболом, 4 занимаются тремя этими видами спорта. Есть ли в классе ученики, равнодушные и ко всем трем видам спорта?

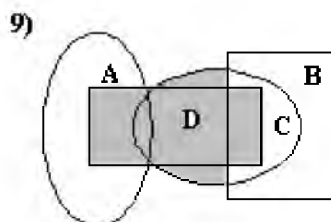
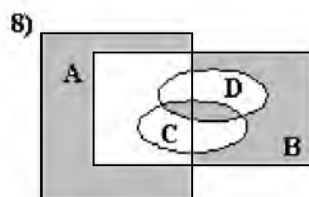
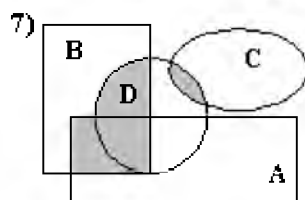
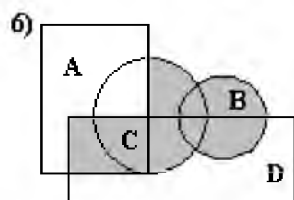
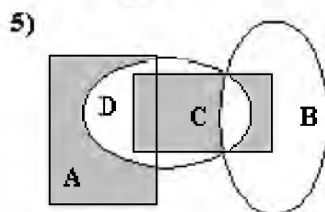
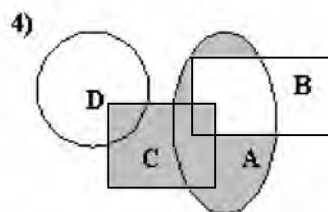
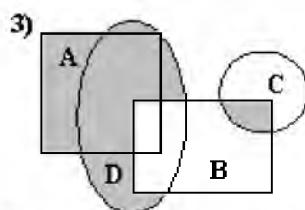
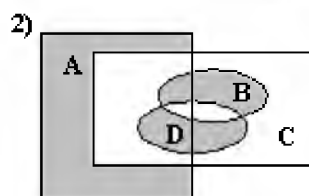
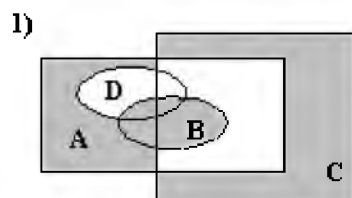
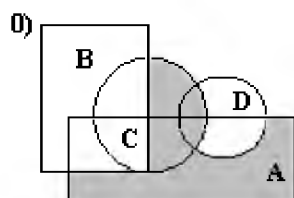
7) В отчете об обследовании студентов сообщалось, что количество студентов, изучающих немецкий, французский и английский языки, таково: все три языка изучают 5 человек, немецкий и английский - 10, французский и английский - 8, немецкий и французский - 20, английский язык - 30 человек, французский - 50, немецкий - 23. Инспектор, представивший этот отчет, был уволен. Почему?

8) Фирма, заказавшая исследование рынка кондитерских изделий, получила следующий отчет. Из 1000 опрошенных 510 нравится шоколад, 490 – конфеты и 427 – леденцы. Из них: 189 – нравится шоколад и конфеты, 140 – шоколад и леденцы, 105 – конфеты и леденцы, 80 – шоколад, леденцы и конфеты. Покажите, что в этой информации есть ошибки.

9) По итогам сессии из 25 студентов группы на «отлично» сдали: информатику - 7 человек, физику – 5 человек, историю – 9 человек. 6 получили «отлично» по истории и физике, 6 получили «отлично» по информатике и истории, 5 получили «отлично» по трем предметам, 15 не

получили ни одной пятерки. Сколько учеников имеют отличные оценки по информатике и по физике?

**1.9. Представьте окрашенные области формулами теории множеств**



## Тема 2. Равносильные преобразования множеств

### Законы теории множеств

$A \cup B \equiv B \cup A;$	$A \cup \emptyset \equiv A;$
$A \cap B \equiv B \cap A;$	$A \cap \emptyset \equiv \emptyset;$
$A \cup (B \cap C) \equiv (A \cup B) \cap C;$	$A \cap \overline{A} \equiv \emptyset;$
$A \cap (B \cup C) \equiv (A \cap B) \cup (A \cap C);$	$A \cup A \equiv A;$
$A \cup (B \cap C) \equiv (A \cup B) \cap (A \cup C);$	$A \cap A \equiv A;$
$A \cup U \equiv U;$	$\overline{A \cup B} \equiv \overline{A} \cap \overline{B};$
$A \cap U \equiv A;$	$\overline{A \cap B} \equiv \overline{A} \cup \overline{B};$
$A \cup \overline{A} \equiv U;$	$A \cup (A \cap B) \equiv A;$
$A \Delta B \equiv B \Delta A;$	$A \cap (A \cup B) \equiv A$
	$A \Delta (B \Delta C) \equiv (A \Delta B) \Delta C;$

### Равносильности теории множеств

$A   B \equiv A \cap \overline{B};$	$A   (B   C) \equiv (A   B) \cup (A \cap C);$
$A   A \equiv \emptyset;$	$(A   B)   C \equiv A   B \cup C;$
$A   (B \cup C) \equiv (A   B) \cap (A   C);$	$A \Delta B \equiv A \cup B   A \cap B;$
$A   (B \cap C) \equiv (A   B) \cup (A   C);$	$A \Delta B \equiv (A   B) \cup (B   A);$
$(A \cap B)   C \equiv (A   C) \cap (B   C);$	$A \cap (B \Delta C) \equiv (A \cap B) \Delta (A \cap C)$
$(A \cup B)   C \equiv (A   C) \cup (B   C);$	$A   (A   B) \equiv A \cap B;$

### Примеры выполнения заданий

1. Докажите теоретико-числовое равенство:  $\overline{\overline{Y \cup X} \cap X \cap Y \cup Z} = Z$   
 $\overline{\overline{Y \cup X} \cap X \cap Y \cup Z} = (Y \cup X \cup \overline{X \cup Y}) \cap Z = U \cap Z = Z$

2. Упростите выражение:  $X \cup (\overline{X} \cap Y) \cap (X \Delta \overline{X})$ .

$$X \cup (\overline{X} \cap Y) \cap (X \Delta \overline{X}) \equiv X \cup (\overline{X} \cap Y) \cap ((X \cup \overline{X}) | (X \cap \overline{X}))$$

$$X \cup (\overline{X} \cap Y) \cap (X \Delta \overline{X}) \equiv X \cup (\overline{X} \cap Y) \cap (U | \emptyset)$$

$$X \cup (\overline{X} \cap Y) \cap (X \Delta \overline{X}) \equiv X \cup (\overline{X} \cap Y) \cap U \equiv (X \cup \overline{X}) \cap (X \cup Y)$$

$$X \cup (\overline{X} \cap Y) \cap (X \Delta \overline{X}) \equiv U \cap (X \cup Y) \equiv X \cup Y$$

### Задания для самостоятельного выполнения

#### 2.1. Докажите равносильность множественных выражений:

$$0) \overline{Z} \cup X \cap Y \cup \overline{X} \equiv \overline{X} \cap \overline{Z}$$

$$X \cap \overline{Y} \cup Z \mid \overline{Y} \equiv Z \mid \overline{Y}$$

$$Y \mid (\overline{X} \cap \overline{Y} \cup Z) \equiv \emptyset;$$

$$2) \overline{X} \cap Y \cap Z \cup X \cap \overline{Z} \equiv (X \cup Y) \cap \overline{Z}$$

$$Y \mid (Y \mid X \cup \overline{Y}) \equiv Y \cap X$$

$$(\overline{Z} \cap \overline{X} \mid X) \mid \overline{Z} \equiv \emptyset;$$

$$4) \overline{X} \cap \overline{Y \cup X \cap \overline{Z}} \equiv \overline{Y} \cap \overline{X}$$

$$\overline{Y \cap Z} \mid \overline{Z} \equiv Z \mid Y$$

$$\overline{X} \mid (X \mid Y \cup \overline{X}) \equiv \emptyset;$$

$$6) \overline{X \cup \overline{Z} \cup \overline{X \cap Y}} \equiv U$$

$$\overline{Y \cap Z} \mid \overline{Y \cap X} \equiv X \cap \overline{Z} \cap Y$$

$$\overline{X} \cap (Y \cup Z) \cap X \cap Y \equiv \emptyset;$$

$$8) \overline{Z \cap (X \cup Z \cap Y)} \cup \overline{X} \equiv \overline{X} \cup \overline{Z}$$

$$X \cup \overline{Z} \cap (Y \mid \overline{X}) \equiv X$$

$$\overline{X \cup Y \cap Z} \mid \overline{X \cup \overline{Z}} \equiv \emptyset;$$

$$1) \overline{X \cap \overline{Y} \cap (Z \cup \overline{X})} \equiv Y \cup \overline{X} \cup \overline{Z}$$

$$(X \mid (X \mid \overline{Y})) \cup (\overline{X} \mid (\overline{X} \mid \overline{Y})) \equiv \overline{Y}$$

$$\overline{X} \cap (\overline{Z} \mid X \cup \overline{Z}) \equiv \emptyset;$$

$$3) \overline{\overline{X \cup (\overline{Y} \cup Z)} \cup X \cap \overline{Y}} \equiv X \cap \overline{Z} \cap Y$$

$$(X \mid \overline{X \cup \overline{Y}}) \mid \overline{Y} \equiv X$$

$$(X \cap \overline{Y}) \mid (\overline{X} \cup \overline{Y}) \equiv \emptyset;$$

$$5) \overline{\overline{X \cap Y \cap \overline{Z} \cup X}} \equiv (\overline{Y} \cup \overline{Z}) \cap \overline{X}$$

$$X \mid Y \cup X \cap \overline{Z} \equiv X \mid Y \cap \overline{Z}$$

$$\overline{X \cup (Y \cap Z \cup \overline{X})} \equiv \emptyset;$$

$$7) \overline{X \cap Y \cap (Z \cap X \cup Y)} \equiv \overline{X} \cup \overline{Y}$$

$$Y \mid (X \cap Y \mid \overline{Y}) \equiv Y \mid X$$

$$\overline{X \cup \overline{Y}} \mid \overline{X \cup Y} \equiv \emptyset;$$

$$9) \overline{X \cup \overline{Y} \cap Z} \cap \overline{X \cap \overline{Z}} \equiv (Y \cup \overline{Z}) \cap \overline{X}$$

$$(\overline{X \cap Z} \mid \overline{X \cup \overline{Y}}) \mid \overline{X} \equiv X \mid Z$$

$$\overline{\overline{X \cup Y} \cap \overline{X}} \equiv \emptyset;$$

#### 2.2. Упростите выражения:

$$0) \quad a) X \cup Y \cup (X \cup Y) \cap Z \equiv$$

$$b) \overline{Y \cap \overline{Z}} \mid (\overline{Y \cap \overline{Z}} \mid Y) \equiv$$

$$c) (\overline{X} \Delta Z) \cap (X \cap Y) \equiv$$

$$d) \overline{Z} \mid (\overline{Z} \mid \overline{X}) \cap X \equiv$$

$$e) (X \cup Y) \Delta (X \cap \overline{Y} \cap \overline{Z}) \equiv$$

$$1) \quad a) \overline{X} \cap \overline{Y} \cup \overline{X \cup \overline{Y} \cup \overline{Y}} \equiv$$

$$b) (X \cup Y \mid Z) \mid (X \cap Z) \equiv$$

$$c) (X \cup Y) \cap (X \Delta \overline{X}) \equiv$$

$$d) \overline{X} \Delta \overline{X \cap \overline{Z}} \equiv$$

$$e) \overline{Y \cup \overline{X} \cap \overline{X} \cap \overline{Y}} \equiv$$

$$\begin{aligned}
& \equiv (\underline{\lambda} \mid \underline{Z}) \mid \underline{Z \cup \lambda} \text{ (}\mathcal{P}\text{)} \\
& \equiv (\underline{\lambda} \mid \underline{Z \cup \underline{\lambda}}) \nabla \underline{Z \cup \underline{\lambda}} \text{ (}\mathcal{P}\text{)} \\
& \equiv (\underline{\lambda \cup X}) \nabla (Z \cap \underline{\lambda} \cap X) \text{ (}\mathcal{P}\text{)} \\
& \equiv (\underline{\lambda \cap X} \mid \underline{\lambda}) \mid X \text{ (}\mathcal{Q}\text{)} \\
& \equiv (\underline{\lambda \cup Z \cap X}) \cap \underline{\lambda} \cap \underline{Z} \text{ (}\mathcal{V}\text{)} \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \equiv (\underline{X} \mid \underline{Z}) \cup (\underline{Z \cup X \nabla X}) \text{ (}\mathcal{P}\text{)} \\
& \equiv (\underline{\lambda \cap X}) \nabla (\underline{\lambda \cup X}) \text{ (}\mathcal{P}\text{)} \\
& \equiv \underline{X} \mid (X \nabla \underline{\lambda}) \text{ (}\mathcal{P}\text{)} \\
& \equiv ((\underline{\lambda \cap X}) \cup \underline{\lambda}) \mid X \text{ (}\mathcal{Q}\text{)} \\
& \equiv \underline{\lambda \cap Z \cap X \cap \lambda \cup X} \text{ (}\mathcal{V}\text{)} \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \equiv (\underline{\lambda \nabla X}) \cap (\underline{\lambda \cap X}) \text{ (}\mathcal{P}\text{)} \\
& \equiv (Z \cup X) \cap (Z \mid X) \text{ (}\mathcal{P}\text{)} \\
& \equiv (\underline{\lambda \nabla X}) \cup \underline{X} \text{ (}\mathcal{P}\text{)} \\
& \equiv (Z \cap (\underline{\lambda \cap X})) \mid Z \text{ (}\mathcal{Q}\text{)} \\
& \equiv \underline{Z \cap Z \cap Z} \text{ (}\mathcal{V}\text{)} \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \equiv \underline{X} \mid (X \nabla \underline{\lambda}) \text{ (}\mathcal{P}\text{)} \\
& \equiv ((\underline{\lambda \cap X}) \cup \underline{X}) \mid X \text{ (}\mathcal{P}\text{)} \\
& \equiv (\underline{\lambda \cup X}) \cap (Z \nabla \underline{X}) \text{ (}\mathcal{P}\text{)} \\
& \equiv \underline{X \cup \lambda \cap (X \mid (Z \cap X))} \text{ (}\mathcal{Q}\text{)} \\
& \equiv \underline{\lambda \cup X} \cup (X \cup X) \text{ (}\mathcal{V}\text{)} \quad (9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \equiv (\underline{\lambda \cap X}) \mid (\underline{\lambda \cup X \cup Z}) \text{ (}\mathcal{P}\text{)} \\
& \equiv \underline{(X \cup \lambda) \mid (Z \nabla X)} \text{ (}\mathcal{P}\text{)} \\
& \equiv (\underline{\lambda \cap X}) \nabla \underline{\lambda} \text{ (}\mathcal{P}\text{)} \\
& \equiv (\underline{\lambda \mid Z}) \cup (X \mid (\underline{\lambda \cap X})) \text{ (}\mathcal{Q}\text{)} \\
& \equiv \underline{\lambda \cup X \cap Z \cap \lambda \cap X} \text{ (}\mathcal{V}\text{)} \quad (10)
\end{aligned}$$

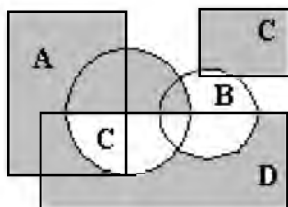
$$\begin{aligned}
& \equiv \underline{X} \mid \underline{Z} \equiv \underline{Z \cup X \nabla X} \text{ (}\mathcal{P}\text{)} \\
& \equiv \underline{X \cap (\underline{\lambda \nabla X})} \text{ (}\mathcal{P}\text{)} \\
& \equiv (\underline{\lambda \mid X}) \nabla (\underline{\lambda \cup X}) \text{ (}\mathcal{P}\text{)} \\
& \equiv X \mid (Z \cap \underline{\lambda \cup X}) \text{ (}\mathcal{Q}\text{)} \\
& \equiv (Z \cap X) \cup (\underline{\lambda \cup X}) \text{ (}\mathcal{V}\text{)} \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \equiv (\underline{\lambda \cap X} \mid \underline{\lambda}) \mid \underline{X} \text{ (}\mathcal{P}\text{)} \\
& \equiv \underline{X \nabla (\underline{\lambda \cap X})} \text{ (}\mathcal{P}\text{)} \\
& \equiv (\underline{\lambda \nabla X}) \cup \underline{\lambda} \text{ (}\mathcal{P}\text{)} \\
& \equiv (\underline{X \mid \lambda \cap X}) \mid \underline{\lambda \cap X} \text{ (}\mathcal{Q}\text{)} \\
& \equiv \underline{X \cap \lambda \cup X} \cap (\underline{\lambda \cup X}) \text{ (}\mathcal{V}\text{)} \quad (12)
\end{aligned}$$

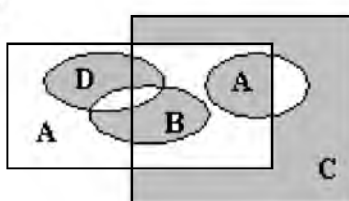
$$\begin{aligned}
& \equiv ((\underline{\lambda \mid Z}) \cup X) \mid (\underline{\lambda \cup X}) \text{ (}\mathcal{P}\text{)} \\
& \equiv \underline{Z \cup X} \mid (\underline{X \nabla Z \cup X}) \text{ (}\mathcal{P}\text{)} \\
& \equiv X \nabla (\underline{\lambda \cup X}) \text{ (}\mathcal{P}\text{)} \\
& \equiv (\underline{\lambda \cap X \mid \lambda}) \cup \underline{X} \text{ (}\mathcal{Q}\text{)} \\
& \equiv \underline{X \cup \lambda \cup X \cup \lambda \cup X} \text{ (}\mathcal{V}\text{)} \quad (13)
\end{aligned}$$

2.3. Представьте окрашенные области формулами теории множеств, упрощая, если возможно.

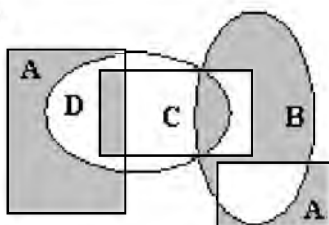
0)



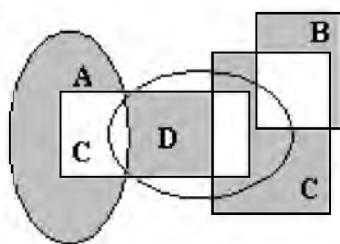
1)



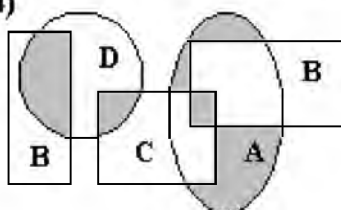
2)



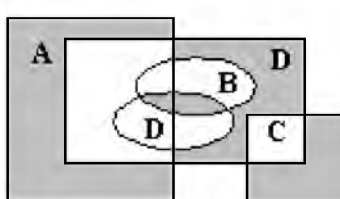
3)



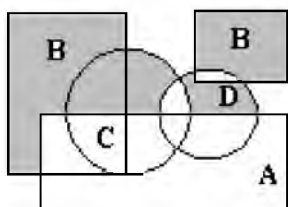
4)



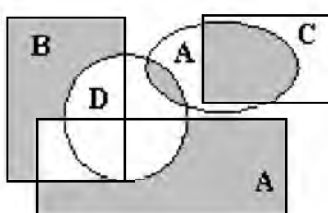
5)



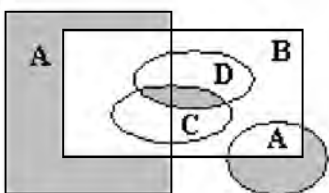
6)



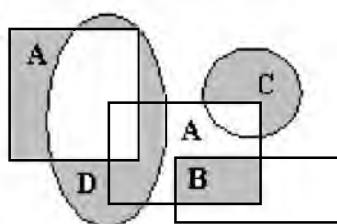
7)



8)



9)





### Тема 3. Отношения и отображения множеств

Пусть заданы  $X$  и  $Y$  - два конечных множества. *Упорядоченной парой* называют пару элементов  $(x, y)$ , где  $x \in X$  и  $y \in Y$ , такую, что равенство двух пар  $(x, y) = (a, b)$  возможно тогда и только тогда, когда  $x = a$  и  $y = b$ .

*Декартово произведение двух множеств  $A$  и  $B$*  - множество упорядоченных пар  $\langle a, b \rangle$  таких, что  $a \in A$  и  $b \in B$ .

Пример: пусть  $A$  - множество первых восьми букв латинского алфавита,  $B$  - множество первых восьми натуральных чисел. Декартово произведение множества  $A$  на множество  $B$  есть множество  $A \times B$ . Получаем обозначение всех 64 клеток шахматной доски.

Пример: пусть  $A$  - множество действительных чисел. Тогда  $A \times A$  - множество всех упорядоченных пар действительных чисел. Получаем множество точек на координатной плоскости с соответствующими координатами.

Теорема: мощность декартова произведения равна произведению мощностей исходных множеств.

*Бинарное отношение множеств  $A$  и  $B$*  - подмножество декартового произведения  $A$  на  $B$ . *Область определения отношения (левая область отношения)* - множество всех первых элементов пар отношения. *Область значений отношения (правая область отношения)* - множество всех вторых элементов пар отношения.

*Отношение эквивалентности* - отношение, являющееся одновременно рефлексивным, симметричным и транзитивным. *Рефлексивное отношение* на множестве  $A$  - отношение, которое справедливо для каждого элемента множества  $A$  как отношение этого элемента к самому себе. Например,  $=, \geq$  - рефлексивные,  $\neq, >$  - нерефлексивные.

*Симметричное отношение* - отношение, результат которого не меняется при перестановке операндов. *Транзитивное отношение* на множестве  $A$  - такое отношение, из справедливости которого для первого и второго операнда и справедливости для второго и третьего операнда следует справедливость этого отношения для первого и третьего операндов, при условии, что все операнды являются любыми элементами множества  $A$ .

*Соответствием* между множествами  $X$  и  $Y$  называют любое подмножество  $G$  их прямого произведения:  $G \subset X \times Y$ .

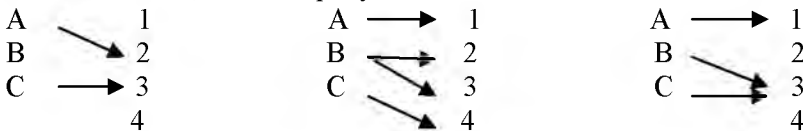
Как и любое множество, соответствие  $G$  можно задать перечислением своих элементов. Значительно удобнее задавать соответствие некоторой таблицей, матрицей или с помощью графического изображения - графа соответствия.

Соответствие  $G \subset X \times Y$  называется *отображением*, если область определения соответствия совпадает с множеством  $X$ .

Пусть  $X$  и  $Y$  – произвольные множества. *Отображением*  $f$  множества  $X$  в множество  $Y$  называют правило (соответствие), которое каждому элементу множества  $X$  ставит в соответствие единственный для этого элемента элемент множества  $Y$ . Обозначение:  $f: X \rightarrow Y$ .

Если  $f(x)=y$ , то элемент  $y$  называется *образом* элемента  $x$  при отображении  $f$ , а элемент  $x$  называется *прообразом* элемента  $y$  при отображении  $f^{-1}$ .

Пример: пусть на множествах  $X = \{A, B, C\}$  и  $Y = \{1, 2, 3, 4\}$  заданы соответствия  $G_1, G_2$  и  $G_3$  рисунками:



$G_1$  и  $G_2$  не являются отображением, а  $G_3$  – отображение.

Отображение  $f: X \rightarrow Y$  является *сюръективным*, если каждый элемент  $y \in Y$  имеет хотя бы один прообраз. Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется *инъективным*, если для любого элемента  $y \in Y$  существует не более одного прообраза. Если отображение  $f$  сюръективно и инъективно одновременно, то оно называется *биективным* (*взаимно однозначным соответствием*).

Пусть  $f: X \rightarrow Y$  и  $g: Y \rightarrow Z$  – два отображения. Зададим правило  $h$ . Применение которого к элементу  $x$  из  $X$  состоит в том, что мы применяем к  $x$  правило  $f$ , затем к результату  $f(x)$  применяем второе правило  $g$ , получая в итоге  $g(f(x))$ . То есть  $h(x) = g(f(x))$ . Полученное отображение  $h: X \rightarrow Z$  называют *композицией* отображений  $g$  и  $f$  и обозначают  $h = g \circ f$ . Тогда  $g \circ f(x) = g(f(x))$ .

### Примеры выполнения заданий

1. Пусть  $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . Запишите бинарное отношение  $R = \{(x, y): x, y \in A, x \text{ делит } y, \text{ и } x < 4\}$ .

Решение:  $R = \{<2, 2>; <2, 4>; <2, 6>; <2, 8>; <3, 3>; <3, 6>\}$ .

2. Пусть заданы множества:  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 3\}$ ,  $C = \{1, 3\}$ . Докажите равносильность равенства:  $C \times (B \setminus A) = (C \times B) \Delta (C \times (A \cap B))$ .

Решение:  $C \times (B \setminus A) = \{1, 3\} \times (\{2, 3\} \setminus \{1, 2\}) = \{1, 3\} \times \{3\} = \{<1, 3>; <3, 3>\}$ .

$C \times (A \cap B) = \{1, 3\} \times (\{1, 2\} \cap \{2, 3\}) = \{1, 3\} \times \{2\} = \{<1, 2>; <3, 2>\}$ .

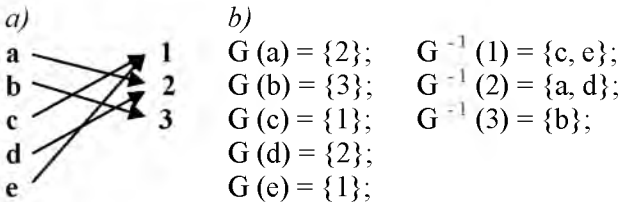
$$C \times B = \{1, 3\} \times \{2, 3\} = \{ \langle 1, 2 \rangle; \langle 1, 3 \rangle; \langle 3, 2 \rangle; \langle 3, 3 \rangle \}.$$

$$(C \times B) \Delta (C \times (A \cap B)) = \{ \langle 1, 2 \rangle; \langle 1, 3 \rangle; \langle 3, 2 \rangle; \langle 3, 3 \rangle \} \Delta \{ \langle 1, 2 \rangle; \langle 3, 2 \rangle \} = \{ \langle 1, 3 \rangle; \langle 3, 3 \rangle \}.$$

Равенство выполнено.

3. Задано соответствие  $G \subset X \times Y$ , где  $X = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3\}$ ,  $G = \{(a, 2), (b, 3), (c, 1), (d, 2), (e, 1)\}$ . а) Изобразите соответствие графически. б) Найдите образы и прообразы множеств заданного соответствия. с) Выясните, является ли данное соответствие отображением.

Решение:

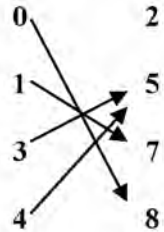


Данное соответствие является отображением, т.к. у каждого элемента множества  $X$  существует образ.

4. Для отображения  $f: \{0, 1, 3, 4\} \rightarrow \{2, 5, 7, 8\}$ , заданного рисунком, найдите  $f(\{0, 3\})$ ,  $f(\{1, 3, 4\})$ ,  $f^{-1}(2)$ ,  $f^{-1}(\{2, 5\})$ ,  $f^{-1}(\{5, 8\})$ .

Решение:

$$\begin{aligned} f(\{0, 3\}) &= \{5, 8\}; \\ f(\{1, 3, 4\}) &= \{5, 7\}; \\ f^{-1}(2) &= \{\emptyset\}; \\ f^{-1}(\{2, 5\}) &= \{3, 4\}; \\ f^{-1}(\{5, 8\}) &= \{0, 3, 4\} \end{aligned}$$



5. Выясните, к какому типу относится заданное отображение  $f$ :  $A = \{a, b, c\}$ ;  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ;  $f: a \rightarrow 2$ ;  $b \rightarrow 4$ ;  $b \rightarrow 6$ ;  $c \rightarrow 8$ ;

Решение:

находим образы:  $y = f(x)$

$$f(a) = 2; f(b) = \{4, 6\}; f(c) = 8$$

Находим прообразы:  $x = f^{-1}(y)$

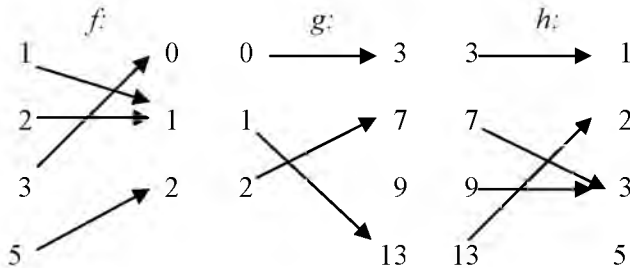
$$f^{-1}(2) = a; f^{-1}(4) = b; f^{-1}(6) = b; f^{-1}(8) = c;$$

Все элементы из  $B$  имеют прообразы, значит  $f$  – сюръективно.

Т.к. элементы 4 и 6 имеют равные прообразы, то  $f$  – неинъективно

Следовательно, заданное отображение не является биективным.

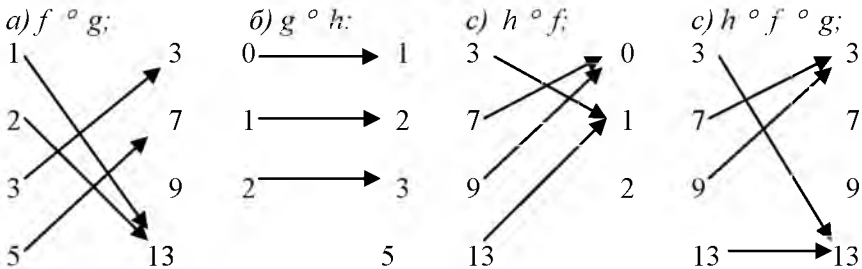
6. Пусть  $f: \{1, 2, 3, 5\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ ,  $g: \{0, 1, 2\} \rightarrow \{3, 7, 9, 13\}$ ,  $h: \{3, 7, 9, 13\} \rightarrow \{1, 2, 3, 5\}$  – отображения, показанные на рисунке:



Нарисуйте композиции отображений:

а)  $f \circ g$ ; б)  $g \circ h$ ; в)  $h \circ f \circ g$ ;

Решение:



### Задания для самостоятельного выполнения

3.1. Пусть  $A = \{-2, 3, -4, 5, -6, 7, -8\}$ . Запишите бинарное отношение  $R$ :

- 0)  $R = \{(x, y): x, y \in A, x < 0, y \leq -4\}$ ;
- 1)  $R = \{(x, y): x, y \in A, x > 0, y < -6\}$ ;
- 2)  $R = \{(x, y): x, y \in A, x < 0, y \geq 5\}$ ;
- 3)  $R = \{(x, y): x, y \in A, x > 0, y > 0\}$ ;
- 4)  $R = \{(x, y): x, y \in A, x \geq 3, y \geq 5\}$ ;
- 5)  $R = \{(x, y): x, y \in A, x < -2, 0 < y < 7\}$ ;
- 6)  $R = \{(x, y): x, y \in A, x \leq -2, 0 < y \leq 5\}$ ;
- 7)  $R = \{(x, y): x, y \in A, x \geq 5, y < -2\}$ ;
- 8)  $R = \{(x, y): x, y \in A, -4 \leq x \leq 3, y > 3\}$ ;
- 9)  $R = \{(x, y): x, y \in A, 0 < x \leq 5, 0 < y \leq 7\}$ .

3.2. Найдите декартово произведение множеств  $C = A \times B$ :

0)  $A = \{1, 2, 3\}$ ;  $B = \{7, 8, 9\}$ ;

1)  $A = \{2, 3, 4, 9\}$ ;  $B = \{1, 7\}$ ;

- 2)  $A = \{1, 7\}; B = \{2, 4, 6, 8\}$       3)  $A = \{3, 5, 10\}; B = \{2, 8, 9\};$   
 4)  $A = \{2, 3, 4, 5\}; B = \{6, 10\}$       5)  $A = \{5, 6\}; B = \{1, 7, 9, 2\};$   
 6)  $A = \{10, 1, 2\}; B = \{1, 2, 8\};$       7)  $A = \{10, 11, 12\}; B = \{2, 8, 9\};$   
 8)  $A = \{6, 9\}; B = \{1, 2, 3, 5\};$       9)  $A = \{2, 3, 5, 6\}; B = \{9, 12\};$

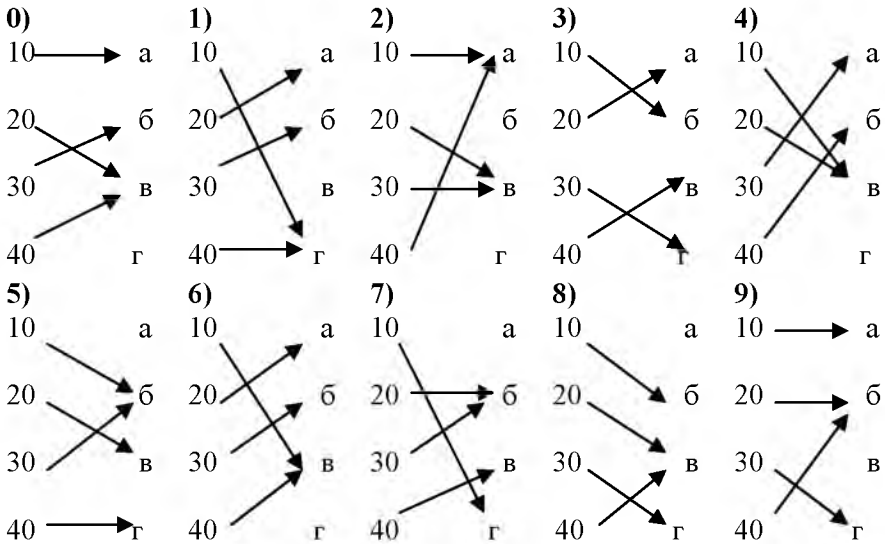
**3.3. Пусть заданы множества:  $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{1, 3\}$ . Докажите равносильности:**

- 0)  $A \times (C \setminus B) = (A \times C) \setminus (A \times (C \cap B));$   
 1)  $B \times (A \cap C) = (B \times A) \setminus (B \times (A \setminus C));$   
 2)  $C \times B = (C \times (B \setminus A)) \cup (C \times (B \cap A));$   
 3)  $A \times (B \Delta C) = (A \times (B \cup C)) \setminus (A \times (C \cap B));$   
 4)  $B \times (A \cup C) = (B \times (A \setminus C)) \cup (B \times C);$   
 5)  $C \times (A \Delta B) = (C \times (A \cup B)) \setminus (C \times (A \cap B));$   
 6)  $A \times (C \cap (B \Delta C)) = (A \times C) \Delta (A \times (C \cap B));$   
 7)  $B \times (A \setminus C) = (B \times A) \Delta (B \times (A \cap C));$   
 8)  $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times (B \setminus A));$   
 9)  $A \times (B \cup C) = (A \times (B \Delta C)) \cup (A \times (B \cap C)).$

**3.4. Задано соответствие  $G \subset X \times Y$ . а) Изобразите соответствие графически. б) Найдите образы и прообразы множеств  $X$  и  $Y$ . с) Выясните, является ли данное соответствие отображением.**

№	$X$	$Y$	$G$
0)	$a, b, c, d$	$1, 2, 3, 4$	$(a, 4), (b, 3), (c, 2), (d, 1)$
1)	$a, b, c, d$	$1, 2, 3, 4, 5$	$(a, 3), (b, 5), (c, 4), (d, 1)$
2)	$a, b, c, d, e$	$1, 2, 3, 4$	$(d, 1), (b, 2), (e, 4), (a, 3)$
3)	$a, b, c, d, e$	$1, 2, 3$	$(b, 2), (c, 1), (e, 3), (a, 3)$
4)	$a, b, c$	$1, 2, 3, 4, 5$	$(a, 2), (b, 1), (c, 5), (a, 3)$
5)	$a, b, c$	$1, 2, 3$	$(a, 1), (a, 3), (b, 2), (c, 3)$
6)	$a, b, c, d$	$1, 2, 3$	$(a, 1), (b, 1), (c, 3), (b, 2)$
7)	$a, b, c$	$1, 2, 3, 4, 5$	$(a, 2), (b, 5), (c, 4), (b, 3)$
8)	$a, b, c$	$1, 2, 3, 4$	$(a, 3), (b, 1), (c, 2), (c, 1)$
9)	$a, b, c, d, e$	$1, 2, 3, 4, 5$	$(b, 5), (c, 3), (e, 1), (a, 2)$
	$a, b, c, d$	$1, 2, 3, 4$	$(b, 3), (c, 4), (d, 3), (a, 1)$

**3.5. Для отображения  $f: \{10, 20, 30, 40\} \rightarrow \{a, b, v, z\}$ , заданного рисунком, найдите  $f(\{10, 40\}), f(\{10, 20, 30\}), f^{-1}(b), f^{-1}(\{a, v\}), f^{-1}(\{b, v, z\})$ .**



3.6. Выясните, являются ли данные соответствия отображениями и если да, то определите, к какому типу относятся отображения  $f1: A \rightarrow B$  и  $f2: A \rightarrow B$ .

№	A	B	$f1$	$f2$
0)	$x, y, z$	$1, 2, 3, 4$	$x \rightarrow 1; y \rightarrow 2; y \rightarrow 3;$	$x \rightarrow 1; y \rightarrow 2; z \rightarrow 4;$
1)	$a, b, c$	$2, 4, 6$	$a \rightarrow 2; b \rightarrow 4; c \rightarrow 6;$	$a \rightarrow 2; c \rightarrow 4; c \rightarrow 6;$
2)	$3, 4, 5$	$a, b, c, d$	$3 \rightarrow a; 4 \rightarrow b; 4 \rightarrow d;$	$3 \rightarrow b; 4 \rightarrow a; 5 \rightarrow d;$
3)	$a, b, c$	$1, 2, 3, 4$	$a \rightarrow 1; a \rightarrow 2; c \rightarrow 4;$	$a \rightarrow 1; b \rightarrow 2; c \rightarrow 4;$
4)	$x, y, z$	$1, 2, 3, 4$	$y \rightarrow 1; y \rightarrow 4; z \rightarrow 3$	$x \rightarrow 1; y \rightarrow 3; z \rightarrow 2;$
5)	$x, y, z$	$2, 3, 4$	$x \rightarrow 2; y \rightarrow 3; z \rightarrow 4;$	$x \rightarrow 2; z \rightarrow 3; z \rightarrow 4;$
6)	$a, b, c$	$2, 5, 6$	$a \rightarrow 6; b \rightarrow 2; c \rightarrow 5;$	$a \rightarrow 2; b \rightarrow 2; a \rightarrow 5;$
7)	$2, 3, 4$	$a, b, c, d$	$2 \rightarrow a; 3 \rightarrow b; 4 \rightarrow b;$	$2 \rightarrow d; 3 \rightarrow c; 4 \rightarrow b;$
8)	$a, b, c$	$3, 4, 5$	$c \rightarrow 3; b \rightarrow 5; c \rightarrow 4;$	$a \rightarrow 4; a \rightarrow 5; c \rightarrow 5;$
9)	$x, y, z$	$2, 4, 5, 7$	$x \rightarrow 2; z \rightarrow 4; z \rightarrow 7;$	$x \rightarrow 4; y \rightarrow 5; z \rightarrow 7;$

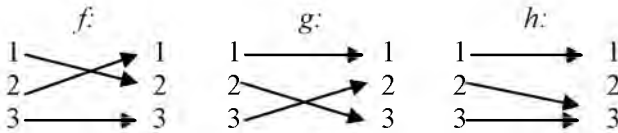
3.7. Выясните, к какому типу относятся отображения  $f1: A \rightarrow B$  и  $f2: A \rightarrow B$ .

№	A	B	$f1$	$f2$
0)	$x, y, z$	$1, 2, 3, 4$	$x \rightarrow 1; y \rightarrow 2; z \rightarrow 3;$	$x \rightarrow 4; y \rightarrow 1; z \rightarrow 4;$
1)	$a, b, c$	$2, 4, 6$	$a \rightarrow 2; b \rightarrow 4; c \rightarrow 4;$	$a \rightarrow 2; b \rightarrow 4; c \rightarrow 6;$

2)	3, 4, 5	a, b, c, d	$3 \rightarrow a; 4 \rightarrow b; 5 \rightarrow d;$	$3 \rightarrow b; 4 \rightarrow c; 5 \rightarrow d;$
3)	a, b, c	1, 2, 3, 4	$a \rightarrow 1; b \rightarrow 2; c \rightarrow 4;$	$a \rightarrow 1; b \rightarrow 1; c \rightarrow 3;$
4)	x, y, z	1, 2, 3, 4	$x \rightarrow 1; y \rightarrow 2; z \rightarrow 4;$	$x \rightarrow 1; y \rightarrow 3; z \rightarrow 4;$
5)	x, y, z	2, 3, 4	$x \rightarrow 2; y \rightarrow 3; z \rightarrow 3;$	$x \rightarrow 2; y \rightarrow 3; z \rightarrow 4;$
6)	a, b, c	2, 5, 6	$a \rightarrow 6; b \rightarrow 6; c \rightarrow 5;$	$a \rightarrow 2; b \rightarrow 2; c \rightarrow 5;$
7)	2, 3, 4	a, b, c, d	$2 \rightarrow a; 3 \rightarrow a; 4 \rightarrow b;$	$2 \rightarrow a; 3 \rightarrow c; 4 \rightarrow b;$
8)	a, b, c	3, 4, 5	$a \rightarrow 3; b \rightarrow 5; c \rightarrow 4;$	$a \rightarrow 4; b \rightarrow 3; c \rightarrow 5;$
9)	x, y, z	2, 4, 5, 7	$x \rightarrow 2; y \rightarrow 2; z \rightarrow 7;$	$x \rightarrow 4; y \rightarrow 5; z \rightarrow 2;$

3.8. Пусть  $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ ,  $g: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ ,  $h: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$  – отображения, заданные рисунком. Нарисуйте композиции отображений:

- 0)  $g \circ f \circ g$     1)  $h \circ g \circ f$     2)  $h \circ f \circ g$     3)  $g \circ h \circ g$     4)  $h \circ f \circ h$   
 5)  $f \circ g \circ f$     6)  $g \circ f \circ h$     7)  $h \circ g \circ h$     8)  $f \circ h \circ f$     9)  $g \circ h \circ f$



3.9. Вычислите мощности множеств A, B и C:

- 0)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 41, x - \text{квадрат числа}\}$     1)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x - \text{делитель } 40\}$   
 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x - 6) = 0\}$      $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - x - 2) \cdot (x^2 - x - 20) = 0\}$   
 $C = \{x, y \in \mathbb{N}, x \text{ делит } y, x < 4, y < 30\}$      $C = \{x, y \in \mathbb{N}, x \text{ делит } y, x < 4, y < 30\}$   
 2)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x - \text{делитель } 81\}$     3)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 3x - 4) \cdot (x^2 - x + 20) = 0\}$   
 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + x - 2) \cdot (x^2 - 7x + 6) = 0\}$      $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 1, x - \text{квадрат числа}\}$   
 $C = \{x, y \in \mathbb{N}, x \text{ делит } y, x < 4, y < 30\}$      $C = \{x, y \in \mathbb{N}, x \text{ делит } y, x < 4, y < 30\}$   
 4)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 65, x - \text{квадрат числа}\}$     5)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x - \text{делитель } 54\}$   
 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 6x + 5) \cdot (x^2 - x - 12) = 0\}$      $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 5x - 6) \cdot (x^2 - 5x + 4) = 0\}$   
 $C = \{x, y \in \mathbb{N}, x \text{ делит } y, x < 4, y < 30\}$      $C = \{x, y \in \mathbb{N}, x \text{ делит } y, x < 4, y < 30\}$   
 6)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x - \text{делитель } 36\}$     7)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 64, x - \text{квадрат числа}\}$   
 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + 3x - 4) \cdot (x^2 + x - 12) = 0\}$      $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + 4x - 5) \cdot (x^2 - 7x + 12) = 0\}$   
 $C = \{x, y \in \mathbb{N}, x \text{ делит } y, x < 4, y < 30\}$      $C = \{x, y \in \mathbb{N}, x \text{ делит } y, x < 4, y < 30\}$   
 8)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 78, x - \text{квадрат числа}\}$     9)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x - \text{делитель } 32\}$   
 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 3x + 2) \cdot (x^2 - 4x - 5) = 0\}$      $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 5x + 6) \cdot (x^2 + x - 20) = 0\}$   
 $C = \{x, y \in \mathbb{N}, x \text{ делит } y, x < 4, y < 30\}$      $C = \{x, y \in \mathbb{N}, x \text{ делит } y, x < 4, y < 30\}$

### Контрольные вопросы по теме «Множества, отношения и отображения»

- А** Сколько существует подмножеств у конечного множества?
- Б** Какими свойствами обладает операция пересечения множеств?
- В** Что понимается под “множество” и “подмножество”?
- Г** Какими свойствами обладает операция объединения множеств?
- Д** Как изобразить диаграммами Венна дистрибутивные законы?
- Е** Что такое мощность множества? Как вычисляется?
- Ё** Какие условия нужны для отношения эквивалентности?
- Ж** Что такое композиция отображений?
- З** Какими свойствами обладает операция пересечения множеств?
- И** Какими свойствами обладает универсальное множество?
- Й** Какие множества эквивалентны множеству натуральных чисел?
- К** Как проиллюстрировать диаграммами Венна законы поглощения?
- Л** Что такое декартово произведение множеств?
- М** Какие множества называются несобственными?
- Н** Какими свойствами обладает операция разности множеств?
- О** Как доказать эквивалентность двух множеств?
- П** Какие способы задания множеств вы знаете?
- Р** Какими свойствами обладает пустое множество?
- С** Какие операции выполняются над множествами?
- Т** Как изобразить диаграммами Венна законы ДЕ Моргана?
- У** Какие множества называются равными?
- Ф** Какими свойствами обладает операция симметрич-ой разности?
- Х** Что такое соответствие на множестве? Как задается соответствие?
- Ц** Как изобразить диаграммами Венна коммутативные законы?
- Ч** Какими свойствами обладает операция дополнения?
- Ш** Что такое декартов квадрат?
- Щ** Что Вы знаете о формулах включения/исключения множеств?
- Ъ** Как изобразить диаграммами Венна ассоциативные законы?
- Ы** Какие существуют виды отображений множеств?
- Ь** Какие множества называют эквивалентными?
- Э** Какими свойствами обладает операция объединения множеств?
- Ю** Какие виды отношений на множестве Вам известны?
- Я** Какие множества называют конечными?

10 вопросов для контрольного опроса выбираются по буквам фамилии, имени, отчества в именительном падеже слева направо без повторения.



## Глава 3. Логические основы информатики

### Тема 1. Элементы логики высказываний

Исследования в алгебре логики тесно связаны с изучением *высказываний*, представляющих собой повествовательное предложение, относительно которого объективно можно сказать, что оно либо истинно, либо ложно. Из одних высказываний могут составляться другие, более сложные высказывания, называемые *составными*. *Простые* высказывания обозначаются буквами латинского алфавита: А, В, С,... и являются *логическими переменными* со значениями истина, либо ложь. Значения истинности высказывания обозначается буквой **И** (истина) или 1, а ложность обозначается **Л** (ложь) или 0. **И** или **Л** называются *логическими константами*. Составные высказывания могут строиться из простых с помощью *логических связей*, которым соответствуют *логические операции* (таблица 2).

Таблица 2. Соответствие логических связей логическим операциям

Логическая связка	Название логических операций	Обозначения операций
<i>не</i>	Отрицание, инверсия	$\neg$
<i>и, а, но, хотя</i>	Конъюнкция	$\&, \cdot, \wedge$
<i>или</i>	Дизъюнкция	$\vee, +$
<i>либо</i>	Разделительная (строгая) дизъюнкция	$\oplus, \Delta$
<i>если..., то</i>	Импликация, следование	$\rightarrow, \Rightarrow$
<i>тогда и только тогда, когда... ...необходимо и достаточно...</i>	Эквивалентность, эквиваленция, равнозначность	$\sim, \Leftrightarrow,$ $\equiv, \leftrightarrow$
<i>не (... и ...)</i>	Штрих Шеффера	$ $
<i>не (... или ...)</i>	стрелка Пирса	$\downarrow, \circ$

Логические операции задаются таблично (таблица 3).

Из логических переменных и констант, соединенных логическими операциями и скобками строятся *логические формулы*. Процесс разбиения составных высказываний на простые; записи их символиче-

ски, введя буквенные обозначения; и заменяя логические связки логическими операциями, называется *формализацией высказывания*.

Таблица 3. Логические операции

A	B	$\neg A$	$A \& B$	$A \vee B$	$A \oplus B$	$A \rightarrow B$	$A \sim B$	$A   B$	$A \downarrow B$
0	0	1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1	0	0

При вычислении значения формулы учитывают *приоритет* выполнения логических операций.

### Примеры выполнения задания

1. Формализуйте и постройте таблицу истинности для высказывания:

Если число делится на 2 и не делится на 3, то оно не делится на 6.

Решение: Выделим и обозначим простые высказывания. Заменяем логические связки операциями по таблице 2.

Если  $\underbrace{\text{число делится на 2}}_A$  и  $\underbrace{\text{не делится на 3}}_{\neg B}$ , то оно не  $\underbrace{\text{делится на 6}}_{\neg C}$ .

A			$\& \neg B$			$\rightarrow \neg C$		
A	B	C	A	$\&$	$\neg B$	A	$\& \neg B$	$\rightarrow \neg C$
0	0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	1	0

2. Вычислите значение выражения  $b \rightarrow a \downarrow b \& a \vee \bar{a}$  при  $a=1, b=0$ .

Решение: сначала определим порядок выполнения операций.

1)  $b \& a = 0 \& 1 = 0$ ;    2)  $b \& a \vee \bar{a} = 0 \vee 0 = 0$ ;

3)  $b \rightarrow a = 0 \rightarrow 1 = 1$ ;    4)  $b \rightarrow a \downarrow b \& a \vee \bar{a} = 1 \downarrow 0 = 0$ .

3. Постройте таблицу истинности для высказывания  $c \& b \vee \bar{a}$

a	b	c	c	$\&$	b	c	$\& b \vee \bar{a}$
---	---	---	---	------	---	---	---------------------

0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0

4. Переформулируйте высказывания, если необходимо. Разбейте составные высказывания на простые и запишите их с помощью логической символики. Постройте таблицу истинности.

*"Если наступит мир, то возникнет депрессия, разве что страна проведёт программу перевооружения, либо осуществит грандиозную программу внутренних капиталовложений в области образования, охраны окружающей среды, борьбы с бедностью т. п.; но невозможно договориться о целях такой грандиозной программы внутренних капиталовложений; значит, если наступит мир и не будет депрессии, то непременно будет осуществляться программа перевооружения."*

Решение: обозначим простые высказывания буквами:

*М* - "наступит мир",

*Д* - "возникнет депрессия",

*П* - "страна проведёт программу перевооружения",

*К* - "страна осуществит грандиозную программу внутренних капиталовложений в области образования, охраны окружающей среды, борьбы с бедностью т. п."

Переформулируем предложение, сохранив смысл, но используя более стандартные обороты:

*"Если наступит мир и страна не выполнит программу перевооружения или программу внутренних капиталовложений в области образования, охраны окружающей среды, борьбы с бедностью т. п., то возникнет депрессия; но невозможно договориться о целях такой грандиозной программы внутренних капиталовложений (т.е. эта программа выполняться не будет); значит, если наступит мир и не будет депрессии, то непременно будет осуществляться программа перевооружения."*

Запишем высказывание с помощью наших обозначений и логических операций:  $((M \wedge \neg(P \vee K) \rightarrow D) \wedge \neg K) \rightarrow ((M \wedge \neg D) \rightarrow P) \equiv$

$$\equiv ((M \wedge (P \downarrow K) \rightarrow D) \wedge \neg K) \rightarrow ((M \wedge \neg D) \rightarrow P)$$

Построим таблицу истинности.

М	П	Д	К	$(M \wedge (P \downarrow K) \rightarrow D) \wedge \neg K$	$(M \wedge \neg D) \rightarrow P$	$( ) \rightarrow ( )$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

### Задания для самостоятельного выполнения

**1.1. Формализуйте и постройте таблицу истинности для высказываний:**

- 0)
  - a) если каждому значению аргумента соответствует единственное значение функции, то функция однозначна;
  - b) для того чтобы три прямые вида:  $ax + by + c = 0$  пересекались в одной точке или были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы левые части их уравнений были линейно независимы;
  - c) если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна и линии их пересечения;
- 1)
  - a) две прямые параллельны тогда и только тогда, когда они не имеют общих точек;
  - b) система  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными  $x_1, \dots, x_n$  имеет решение в том и только в том случае, если матрица системы и расширенная матрица системы имеют один и тот же ранг;
  - c) если производная функции в точке равна нулю и вторая производная этой функции в той же точке отрицательна, то данная точка есть точка локального максимума функции;

- 2)
  - a)* для того чтобы числовой ряд сходиллся, необходимо, чтобы предел суммы этого ряда стремился к 0;
  - b)* если прямая А параллельна прямой В и прямая В параллельна прямой С, то прямая А параллельна прямой С;
  - c)* логарифм некоторого положительного числа будет положительным, если основание логарифма и логарифмируемое число будут больше 1 или если основание логарифма и логарифмируемое число будут заключены между 0 и 1;
- 3)
  - a)* два ненулевых вектора  $a$  и  $b$  взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда их произведение равно 0;
  - b)* треугольник на плоскости единственным образом определяется тремя сторонами или двумя сторонами и углом или стороной и двумя прилежащими к ней углами;
  - c)* если 12 делится на 6, то 12 делится на 3;
- 4)
  - a)* если не задан радиус окружности, то нельзя вычислить ее длину;
  - b)* для того чтобы вычислить площадь прямоугольного треугольника, необходимо и достаточно знать либо значения катетов, либо значения катета и гипотенузы, либо значение одной из сторон и величину угла;
  - c)* произведение трех чисел равно нулю тогда и только тогда, когда одно из них равно нулю;
- 5)
  - a)* каждая рациональная функция от  $x$  может быть представлена в виде суммы многочлена и конечного числа элементарных дробей;
  - b)* корни квадратного уравнения либо действительные различные, либо действительные равные, либо комплексные сопряженные;
  - c)* если в треугольнике любая его медиана не является высотой и биссектрисой, то этот треугольник не равнобедренный и не равносторонний;
- 6)
  - a)* если в треугольнике нет прямого угла, то он не прямоугольный;
  - b)* для того чтобы вычислить объем цилиндра, необходимо и достаточно, чтобы были заданы высота цилиндра и радиус основания;
  - c)* если в параллелограмме не все углы прямые или не все стороны равны между собой, то этот параллелограмм не прямоугольник или не ромб;
- 7)
  - a)* вычисление длины окружности и площади круга может осуществляться по одному и тому же значению радиуса;
  - b)* если кубическое уравнение действительно, то оно имеет или

один действительный корень и два сопряженных комплексных корня, или три действительных корня;

с) если сумма цифр числа кратна 3, то и само число кратно 3;

- 8) а) если в треугольнике все стороны равны, то он равносторонний;  
 б) решение системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными  $x_1, \dots, x_n$  может быть найдено либо методом Гаусса, либо методом Крамера, либо методом Зейделя;

с) если 6 делится на 2, то и 24 делится на 2;

- 9) а) если три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого треугольника, то эти треугольники равны;  
 б) если мощность бесконечного множества больше, чем мощность счетного множества, то это множество является несчетным;  
 с) если 10 делится на 5, то и 100 делится на 5.

### 1.2. Вычислите значения выражений:

- |  |                     |                     |
|--|---------------------|---------------------|
| 0) $\bar{a} \vee b \& \bar{a} \downarrow a \sim \bar{b}$ | а) при $a=1, b=0$ ; | б) при $a=0, b=1$ ; |
| 1) $a \sim (b \mid a) \vee b \& a$                       | а) при $a=0, b=1$ ; | б) при $a=1, b=1$ ; |
| 2) $\bar{b} \mid a \oplus b \rightarrow a \& b$          | а) при $a=0, b=0$ ; | б) при $a=1, b=0$ ; |
| 3) $(a \mid b) \vee \bar{b} \& \bar{a} \oplus a$         | а) при $a=0, b=1$ ; | б) при $a=1, b=0$ ; |
| 4) $\bar{a} \vee b \mid a \vee a \sim \bar{b}$           | а) при $a=0, b=1$ ; | б) при $a=0, b=0$ ; |
| 5) $a \sim (b \rightarrow a) \oplus b \downarrow a$      | а) при $a=1, b=0$ ; | б) при $a=1, b=1$ ; |
| 6) $\bar{b} \sim a \oplus \bar{b} \mid a \& b$           | а) при $a=1, b=0$ ; | б) при $a=0, b=0$ ; |
| 7) $(a \oplus b) \mid \bar{b} \& a \vee b$               | а) при $a=0, b=0$ ; | б) при $a=1, b=0$ ; |
| 8) $\bar{a} \downarrow b \& \bar{a} \vee a \sim \bar{b}$ | а) при $a=0, b=0$ ; | б) при $a=0, b=1$ ; |
| 9) $a \mid (b \rightarrow a) \oplus b \& a$              | а) при $a=0, b=0$ ; | б) при $a=1, b=0$ ; |

### 1.3. Постройте таблицы истинности формулы алгебры логики:

- |   |  |
|---|--|
| 0) а) $\bar{b} \vee \bar{a} \& \bar{a} \oplus c$ ;  | б) $\bar{a} \mid b \rightarrow c \& a$ ;           |
| 1) а) $c \rightarrow b \oplus \bar{a} \& c$ ;       | б) $\bar{a} \rightarrow b \oplus c \downarrow a$ ; |
| 2) а) $\bar{a} \& b \rightarrow c \oplus \bar{b}$ ; | б) $a \& \bar{b} \mid \bar{b} \rightarrow c$ ;     |
| 3) а) $a \sim c \vee \bar{b} \oplus \bar{a}$ ;      | б) $a \rightarrow \bar{b} \downarrow a \sim c$ ;   |
| 4) а) $c \& \bar{a} \rightarrow \bar{b} \sim a$ ;   | б) $\bar{a} \downarrow \bar{b} \vee a \& c$ ;      |
| 5) а) $b \oplus c \& \bar{a} \sim b$ ;              | б) $(\bar{b} \& c \vee a) \downarrow a$ ;          |
| 6) а) $\bar{a} \& b \rightarrow \bar{b} \sim c$ ;   | б) $(a \oplus b) \mid c \vee a$ ;                  |
| 7) а) $\bar{a} \vee \bar{b} \oplus c \& \bar{b}$    | б) $\bar{b} \& a \oplus a \mid c$                  |
| 8) а) $c \rightarrow a \vee a \sim \bar{b}$         | б) $a \vee b \downarrow c \rightarrow a$           |

$$9) \quad a) \bar{b} \rightarrow c \oplus \bar{a} \vee b$$

$$b) a \rightarrow b \oplus a \downarrow c$$

**1.4. Переформулируйте высказывания, если необходимо. Разбейте составные высказывания на простые и запишите их с помощью логической символики. Постройте таблицу истинности.**

**0)** Если усложнить схему устройства, то возрастает его производительность, а если использовать новую элементную базу, то увеличится период эксплуатации. Устройство начнут хорошо раскупать только при одновременном росте его производительности и периода эксплуатации. Но устройство не пользуется спросом.

**1)** Увеличение денег в обращении влечёт за собой инфляцию. Но рост денежной массы происходит по двум причинам: из-за денежной эмиссии или снижения товарооборота. Снижение товарооборота приводит к безработице и спаду производства. Из-за инфляции падает курс денежной единицы. Рекомендации экономиста Иванова: увеличить денежную эмиссию и поднять производство, тогда избежим безработицы, и курс денежной единицы останется неизменным.

**2)** Любой марксист-диалектик, но не всякий диалектик-марксист. Любой марксист-материалист, но не всякий материалист-марксист. Гегель был диалектик, но не материалист. Фейербах был материалист, но не диалектик. Итак, если бы Гегель и Фейербах могли объединиться в один кружок, то Маркс уже не понадобился бы.

**3)** Существуют две теории возникновения человека на земле - теория эволюции Дарвина и теория сотворения человека Господом Богом. Если справедлива теория эволюции, то самопроизвольное возникновение человека без соответствующих превращений живых организмов невозможно. Как доказали учёные, такие превращения действительно имели место. По теории же сотворения человек был слеплен из простой глины, а жизнь в него вдохнул господь. Глины всегда было много, а на счёт дыхания Бога тоже сомневаться не приходится, поскольку есть на то свидетельство Библии. Отсюда вывод – две названные теории друг другу не противоречат.

**4)** Из утверждения "два плюс два равно пяти" следует, что я и папа римский - одно и то же лицо. В самом деле, если от обеих частей указанного равенства отнять по двойке, то будет справедливо равенство "два равно трём". Если от обеих частей нового равенства отнять по единице, то будет справедливо равенство - "один равен двум". Один - это я, а двойка - это я и папа римский. Поскольку верно, что "один равен двум", то я есть папа римский.

5) Сегодня посмотрю футбол, если трамвай не задержится. Трамвай не опоздал, но случилась другая беда: у меня не оказалось денег на билет. Рискну доехать «зайцем». В салоне оказался контролер, и я лихорадочно стал рыться по карманам. К моему счастью, нашелся один неиспользованный трамвайный талон. До компостера я добрался вовремя, хотя футбольный матч я так и не увидел: вместе с деньгами я дома оставил и билет на матч.

6) Если в одном месте что-то убудет, то в другом месте что-то прибудет – это истина, не требующая доказательств. Но есть такая теория, которая утверждает: где-то в далеком космосе существуют «черные дыры», куда все проваливается, но оттуда ничего не появляется. Эта теория ничего не говорит о существовании «белых дыр», которые действовали бы противоположно «черным». Один иностранный астрономический журнал сообщил координаты «черной дыры». Российский астроном Иванов направил туда мощный телескоп и ничего не обнаружил. «Так-так, - сказал Иванов, - но «белую дыру» я все же открою».

7) Если в цепи будет большой перепад напряжения, то сгорит предохранитель, что повлечет за собой необходимость его замены. При целом предохранителе телевизор, конечно, будет работать, но только если он включен в сеть питания. Если телевизор работает нормально, то я увижу сегодняшние «Новости». Итак, я смотрю телевизионные «Новости» при условии отсутствия перепада напряжения и подключения телевизора к сети питания.

8) Уменьшение температуры приводит к снижению давления и уменьшению объема. Увеличение объема приводит к росту скорости потока. Повышение давления приводит к падению уровня, если при этом уменьшать температуру. Снижение скорости приводит к уменьшению давления или росту температуры. Технолог Иванов рассудил так: «Мне надо повысить давление при одновременном снижении скорости потока, поэтому я должен увеличить объем и температуру».

9) «Если знать язык программирования, то можно составить рабочую программу. Рабочую программу можно также получить при условии наличия знакомого программиста. Овладеть языком программирования можно, обучаясь в институте. Если программа работает, то ее написал выпускник такого института. Но программа не работает. Это говорит о том, что желающий получить правильный результат не знает языка программирования и не имеет знакомых программистов».



## Тема 2. Равносильные преобразования формул алгебры логики

Преобразования логических формул похожи на преобразования формул в обычной алгебре (вынесение общего множителя за скобки, использование переместительного и сочетательного законов и т.п.), тогда как другие преобразования основаны на свойствах, которыми не обладают операции обычной алгебры (использование распределительного закона для конъюнкции, законов поглощения, склеивания, де Моргана и др.). Логические операции обладают рядом свойств и подчинены логическим законам, изложенным в следующей таблице:

<i>Название</i>	<i>Содержание</i>
<i>Коммутативность (переместительный)</i>	$a \vee b \equiv b \vee a \qquad a \& b \equiv b \& a$
	$a \oplus b \equiv b \oplus a$
<i>Ассоциативность (сочетательный)</i>	$a \vee (b \vee c) \equiv (a \vee b) \vee c$
	$a \& (b \& c) \equiv (a \& b) \& c$
	$a \oplus (b \oplus c) \equiv (a \oplus b) \oplus c$
<i>Дистрибутивность (распределительный)</i>	$a \& (b \vee c) \equiv (a \& b) \vee (a \& c)$
	$a \vee (b \& c) \equiv (a \vee b) \& (a \vee c)$
<i>Закон снятия двойного отрицания</i>	$\overline{\overline{a}} \equiv a$
<i>Законы де Моргана</i>	$\overline{a \& b} \equiv \overline{a} \vee \overline{b}$
	$\overline{a \vee b} \equiv \overline{a} \& \overline{b}$
	$a \vee b \equiv \overline{\overline{a \& b}}; a \& b \equiv \overline{\overline{a \vee b}}$
<i>Законы поглощения</i>	$a \vee a \& b \equiv a \qquad a \& (a \vee b) \equiv a$
<i>Свойства константы Л</i>	$a \vee Л \equiv a \qquad a \& Л \equiv Л$
<i>Свойства константы И</i>	$a \vee И \equiv И \qquad a \& И \equiv a$
<i>Закон исключения третьего</i>	$\overline{a} \vee a \equiv И$
<i>Законы идемпотентности</i>	$a \vee a \equiv a \qquad a \& a \equiv a$
<i>Закон противоречия</i>	$\overline{a} \& a \equiv Л$

Операции строгой дизъюнкции, импликации, эквиваленции, функция Шеффера и стрелка Пирса могут быть равносильно выражены через операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, поэтому они считаются как-бы избыточными.

Логические равносильности алгебры логики:

- 1)  $a \rightarrow b \equiv \bar{a} \vee b$ ;                      4)  $a \oplus b \equiv \bar{a} \& b \vee a \& \bar{b}$ ;  
 2)  $a | b \equiv \neg(a \& b)$ ;                      5)  $a \sim b \equiv a \& b \vee \bar{a} \& \bar{b}$ ;  
 3)  $a \downarrow b \equiv \neg(a \vee b)$ ;                      6)  $a \sim b \equiv (a \vee \bar{b}) \& (\bar{a} \vee b)$ .

Равносильное упрощение формул выполняется по шагам:

1. замена операций импликации, строгой дизъюнкции, эквиваленции, функции Шеффера и стрелки Пирса равносильностями алгебры логики;
2. применение законов алгебры логики.

### Примеры выполнения задания

1. Докажите равносильность  $x \& \bar{y} \vee x \vee y \equiv y$  разными способами:

а) докажем равносильность формул, используя законы алгебры логики:

$x \& \bar{y} \vee x \vee y \equiv x \& \bar{y} \vee \bar{x} \vee y$  (по закону де Моргана);

$x \& \bar{y} \vee x \& y \equiv y \& (x \vee \bar{x})$  (по дистрибутивному закону);

$y \& (x \vee \bar{x}) \equiv y \& И$  (по закону исключения третьего);

$y \& И \equiv y$  (по свойству логической константы И);

б) докажем равносильность формул с помощью построения таблиц истинности:

$x$	$y$	$x \& \bar{y}$	$x \vee y$	$x \& \bar{y} \vee x \vee y$	$y$
0	0	0 0 1	1 1 1	0 1 1	1
0	1	0 0 0	1 0 0	0 0 0	0
1	0	1 1 1	0 0 1	1 1 0	1
1	1	1 0 0	0 0 0	0 0 0	0

2. Определите, является ли формула  $X \& Y \& \bar{X} \rightarrow Y$  тавтологией или противоречием:

$X \& Y \& \bar{X} \rightarrow Y \equiv \overline{X \& Y \& \bar{X}} \vee Y$  (по равносильности 1)

$\overline{X \& Y \& \bar{X}} \vee Y \equiv \bar{X} \vee \bar{y} \vee x \vee Y$  (по закону де Моргана)

$\bar{X} \vee \bar{y} \vee x \vee Y \equiv \bar{X} \vee \bar{y} \vee X \vee Y$  (по закону снятия дв. отрицания);

$\bar{X} \vee \bar{y} \vee X \vee Y \equiv \bar{X} \vee X \vee \bar{y} \vee Y$  (по коммутативному закону);

$\bar{X} \vee X \vee \bar{y} \vee Y \equiv И \vee И \equiv И$  (по закону исключения третьего).

3. Преобразуйте равносильным образом формулу  $X \rightarrow \overline{X \rightarrow Y}$  так, чтобы она содержала только операции отрицания и конъюнкции:

$$\begin{aligned} X \rightarrow \overline{X \rightarrow Y} &\equiv X \rightarrow \overline{\overline{X} \vee Y} \equiv X \rightarrow X \& \overline{Y} \equiv \\ &\equiv \overline{\overline{X}} \vee X \& \overline{Y} \equiv (\overline{\overline{X}} \vee X) \& (\overline{\overline{X}} \vee \overline{Y}) \equiv I \& (\overline{\overline{X}} \vee \overline{Y}) \equiv \overline{\overline{X}} \vee \overline{Y} \equiv \overline{X} \& \overline{Y}. \end{aligned}$$

4. Упростите формулы: а)  $x \& (y \rightarrow x) \rightarrow \overline{y}$ ; б)  $X \oplus \overline{X \rightarrow Y}$ .

$$\begin{aligned} \text{а) } x \& (\overline{y \vee x}) \rightarrow \overline{y} &\equiv x \& (\overline{y \vee x}) \vee \overline{y} \text{ (по равносильности 1);} \\ \overline{x \& (\overline{y \vee x}) \vee \overline{y}} &\equiv \overline{x} \vee (\overline{y} \& \overline{x}) \vee \overline{y} \text{ (по закону де Моргана);} \\ \overline{x} \vee (\overline{y} \& \overline{x}) \vee \overline{y} &\equiv \overline{x} \vee (y \& x) \vee \overline{y} \text{ (по закону снятия дв. отрицания);} \\ \overline{x} \vee (y \& x) \vee \overline{y} &\equiv \overline{x} \vee \overline{y} \text{ (по закону поглощения).} \\ \text{б) } X \oplus \overline{X \rightarrow Y} &\equiv X \oplus \overline{\overline{X} \vee Y} \equiv \text{(по равносильности 1);} \\ &\equiv X \oplus X \& \overline{Y} \equiv \text{(по закону де Моргана);} \\ &\equiv X \& \overline{X \& \overline{Y}} \vee \overline{X} \& X \& \overline{Y} \equiv \text{(по равносильности 4);} \\ &\equiv X \& (\overline{\overline{X}} \vee Y) \vee I \equiv \text{(по свойствам константы I);} \\ &\equiv (X \& \overline{\overline{X}}) \vee (X \& Y) \equiv \text{(по дистрибутивному закону);} \\ &\equiv I \vee X \& Y \equiv X \& Y \text{ (по свойствам константы I).} \end{aligned}$$

### Задания для самостоятельного выполнения

2.1. Найдите отрицание следующих формул:

- 0) а)  $X \& (Y \vee \overline{Z}) \vee \overline{X} \& Y \& \overline{W}$ ;
- 1) а)  $(\overline{X} \& \overline{Y} \& \overline{Z} \vee R) \& \overline{U} \& \overline{V}$ ;
- 2) а)  $((\overline{X} \& (\overline{Y} \vee Z)) \vee P) \& \overline{U} \vee \overline{R} \& \overline{V}$ ;
- 3) а)  $\overline{X \vee \overline{Z}} \vee ((\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z) \& X \& Y \& \overline{Z})$ ;
- 4) а)  $(X \vee \overline{\overline{X} \vee Y \vee \overline{Y} \& \overline{Z}}) \& \overline{X \vee Y}$ ;
- 5) а)  $X \& (X \& \overline{Y} \vee \overline{\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}}) \& (\overline{X} \vee \overline{Y})$ ;
- 6) а)  $\overline{X \vee \overline{Y}} \& (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \vee \overline{X}$ ;
- 7) а)  $(\overline{X} \& (Z \vee Y)) \vee (X \& \overline{Z})$ ;
- 8) а)  $X \vee \overline{\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}} \& (X \vee Y \vee \overline{Z})$ ;
- 9) а)  $((\overline{X} \& (\overline{Y} \vee X \& \overline{Z} \vee Y \& Z)) \vee X$ ;

2.2. Определите, являются ли формулы тавтологией или противоречием:

- |   |  |
|---|--|
| 0) а) $X \rightarrow (Y \rightarrow X \& Y)$ ;  | б) $\overline{X} \& Y \sim \overline{X} \rightarrow \overline{Y}$ ;            |
| 1) а) $((X \rightarrow Y) \& (X \rightarrow \overline{Y})) \rightarrow \overline{X}$ ;            | б) $\overline{X \vee \overline{Z}} \& \overline{Y \oplus Z} \& X$ ;            |
| 2) а) $(X \rightarrow Y) \rightarrow ((X \rightarrow \overline{Y}) \rightarrow \overline{X})$ ;   | б) $\overline{X \& \overline{Y}} \sim \overline{X \vee \overline{Y}}$ ;        |
| 3) а) $((\overline{X} \rightarrow Y) \& (\overline{X} \rightarrow \overline{Y})) \rightarrow X$ ; | б) $X \rightarrow Y \sim \overline{Y} \rightarrow \overline{X}$ ;              |
| 4) а) $X \& (X \rightarrow Y) \rightarrow Y$ ;  | б) $Y \& X \rightarrow Y \& X \& Y$ ;  |
| 5) а) $(X \rightarrow Y) \& \overline{Y} \rightarrow \overline{X}$ ;                              | б) $\overline{X} \& Y \sim \overline{X} \sim \overline{Y} \rightarrow X$ ;     |
| 6) а) $((X \rightarrow Y) \rightarrow X) \rightarrow X$ ;   | б) $(X \vee \overline{Y} \rightarrow Y) \& (\overline{X} \vee Y)$ ;            |
| 7) а) $X \rightarrow (Y \rightarrow (X \vee Y \rightarrow X \& Y))$ ;                             | б) $\overline{X} \sim Y \& X \vee \overline{X} \oplus Y \& X$ ;                |
| 8) а) $(X \sim Y) \rightarrow (X \rightarrow Y)$ ;  | б) $(X \sim \overline{Y}) \vee X \vee Y \& (\overline{X} \vee \overline{Y})$ ; |
| 9) а) $(\overline{X} \rightarrow Y \& \overline{Y}) \rightarrow X$ ;                              | б) $(\overline{X} \oplus Y) \& (X \sim \overline{Y})$                          |
- 
- |   |   |
|---|---|
| 0) с) $\overline{X \vee Y \vee Z} \rightarrow \overline{X \& Z \& Y}$ ;                       | 5) с) $X \& Y \& (Z \vee \overline{Y} \vee \overline{P}) \& \overline{Y}$ ;       |
| 1) с) $\overline{X} \& Y \vee \overline{X \vee Y} \vee X$ ;                                   | 6) с) $\overline{X \& X \vee Y} \& (X \& Y \vee Y)$ ;                             |
| 2) с) $X \& Y \vee (X \& Y \rightarrow Z)$ ;  | 7) с) $X \& (Y \& (\overline{X} \vee \overline{Y}))$ ;                            |
| 3) с) $\overline{X \& \overline{Y}} \vee X \& Y \vee \overline{X} \rightarrow \overline{Y}$ ; | 8) с) $\overline{(X \vee Y) \& (\overline{Y} \vee Z)} \vee \overline{X} \vee Z$ ; |
| 4) с) $X \vee Y \vee \overline{X} \& Y \rightarrow X$ ;                                       | 9) с) $X \& Y \rightarrow X \vee \overline{Y}$ .                                  |

2.3. Докажите равносильности формул с помощью построения таблиц истинности:

- |  |   |
|--|---|
| 0) а) $X \rightarrow (Y \rightarrow Z) \equiv X \& Y \rightarrow Z$ ;                                      | б) $X \sim Y \& \overline{X} \equiv X \vee \overline{Y}$ ;                          |
| 1) а) $Y \& \overline{X \vee Z} \vee \overline{Y \vee X} \equiv Y \& Z \vee \overline{X}$ ;                | б) $Y \vee \overline{X} \rightarrow Y \vee X \equiv X \vee Y$ ;                     |
| 2) а) $\overline{Z \vee X \vee Y} \& \overline{X} \& \overline{Y} \vee \overline{Z} \equiv \overline{Z}$ ; | б) $X \& (X \rightarrow Y) \equiv X \& Y$ ;   |
| 3) а) $Z \vee Y \& Z \vee X \& \overline{Z} \equiv Z \vee X$ ;   | б) $\overline{X} \rightarrow \overline{Y} \oplus \overline{X} \equiv X \vee Y$ ;    |
| 4) а) $(X \& Y \vee Z) \& (X \vee Y) \vee Z \equiv X \vee Z \vee Y$ ;                                      | б) $X \oplus \overline{X} \rightarrow \overline{Y} \equiv \overline{Y}$ ;           |
| 5) а) $X \& \overline{Y} \vee \overline{X} \& Y \& Z \vee X \& Z \equiv X \& \overline{Y} \vee Y \& Z$     | б) $Y \vee Y \& X \vee \overline{Y} \equiv Y$ ;                                     |
| 6) а) $X \& \overline{Y} \vee X \vee \overline{Y} \equiv \overline{Y}$ ;                                   | б) $X \rightarrow Y \vee \overline{X} \& \overline{Y} \equiv \overline{X} \vee Y$ ; |
| 7) а) $X \& (Y \rightarrow X) \rightarrow \overline{Y} \equiv \overline{X} \vee \overline{Y}$ ;            | б) $(X \vee Y) \& (X \vee \overline{Y}) \equiv X$ ;                                 |
| 8) а) $\overline{X \vee Y} \vee (X \vee \overline{Y}) \equiv X \vee \overline{Y}$ ;                        | б) $\overline{X} \rightarrow \overline{Y} \oplus X \sim Y \equiv X \& Y$ ;          |
| 9) а) $\overline{X \& Y} \rightarrow Y \sim X \& \overline{Y} \equiv X \& \overline{Y}$ ;                  | б) $X \oplus Y \& \overline{X} \equiv X \vee Y$ .                                   |

**2.4. Докажите равносильность формул разными способами:**

- 0) а)  $\overline{X \vee Y \vee X \vee \bar{Y}} \equiv \overline{x \sim y}$ ; б)  $X \rightarrow (Y \rightarrow Z) \equiv X \& Y \rightarrow Z$ ;  
 1) а)  $X \rightarrow Y \oplus \bar{X} \equiv \bar{X} \vee Y$ ; б)  $X \& \bar{Y} \vee \bar{X} \& Y \& Z \vee X \& Z \equiv X \& \bar{Y} \vee Y \& Z$ ;  
 2) а)  $X \oplus Y \& \bar{X} \equiv X \vee Y$ ; б)  $Z \vee Y \& Z \vee X \& \bar{z} \equiv Z \vee X$ ;  
 3) а)  $X \oplus Y \rightarrow \bar{X} \vee Y \equiv \bar{X} \vee Y$ ; б)  $Y \& \overline{\bar{X} \vee \bar{Z} \vee \bar{Y} \vee X} \equiv Y \& Z \vee \bar{X}$ ;  
 4) а)  $X \rightarrow Y \vee \bar{X} \oplus Y \vee X \& Y \equiv \bar{X}$ ; б)  $(X \& Y \vee Z) \& (X \vee Y) \vee Z \equiv X \vee Z \vee Y$ ;  
 5) а)  $(X \oplus \bar{Y}) \vee \bar{X} \& \bar{Y} \equiv \bar{X} \& \bar{Y}$ ; б)  $\bar{Y} \& (\bar{X} \vee Y) \rightarrow Z \equiv X \vee Y \vee Z$ ;  
 6) а)  $\bar{X} \oplus Y \rightarrow X \equiv X \vee Y$ ; б)  $\bar{X} \& \bar{Y} \& X \rightarrow Z \equiv X \vee \bar{Y} \vee Z$ ;  
 7) а)  $\bar{X} \oplus \bar{Y} \& \bar{X} \rightarrow \bar{Y} \equiv \bar{X} \vee \bar{Y}$ ; б)  $(\bar{X} \rightarrow X \vee Z) \& (Y \vee X) \equiv X \vee (Y \& Z)$ ;  
 8) а)  $\bar{X} \oplus \bar{Y} \vee \bar{X} \& \bar{Y} \equiv X \sim Y$ ; б)  $\bar{X} \rightarrow \bar{Y} \oplus Z \vee Y \equiv X \vee Y \vee \bar{Z}$ ;  
 9) а)  $\bar{X} \rightarrow Y \sim X \equiv X \vee \bar{Y}$ ; б)  $\bar{Z} \& X \oplus \bar{X} \rightarrow \bar{Y} \equiv Z \& X \vee \bar{Y}$ ;

**2.5. Преобразуйте равносильным образом следующие формулы так, чтобы они содержали только для а) операции отрицания и конъюнкции, для б) операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции:**

- 0) а)  $X \vee Y \rightarrow \bar{X} \rightarrow Z$ ; б)  $((X \rightarrow Y) \& (Y \rightarrow X)) \rightarrow (X \vee Y)$ ;  
 1) а)  $\bar{X} \rightarrow Y \vee \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ ; б)  $((X \rightarrow Y) \& (Y \rightarrow \bar{X})) \rightarrow (Z \rightarrow X)$ ;  
 2) а)  $((X \rightarrow Y) \rightarrow Z) \rightarrow \bar{X}$ ; б)  $((X \sim \bar{Y}) \rightarrow Z) \rightarrow (X \sim \bar{Z})$ ;  
 3) а)  $(X \vee Y \vee Z \rightarrow X) \vee Z$ ; б)  $(X \rightarrow (Y \sim Z)) \sim ((X \rightarrow Y) \sim Z)$ ;  
 4) а)  $X \vee (Y \rightarrow Z) \rightarrow X$ ; б)  $(X \rightarrow Y) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow \bar{X})$ ;  
 5) а)  $(X \rightarrow Y) \rightarrow Y \& Z$ ; б)  $((X \& \bar{Y}) \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow \bar{Y})$ ;  
 6) а)  $\bar{X} \& \bar{Y} \rightarrow X \& Y$ ; б)  $(X \rightarrow Y) \rightarrow ((X \rightarrow \bar{Y}) \rightarrow (X \& Y))$ ;  
 7) а)  $\bar{X} \& \bar{Y} \vee Z \rightarrow Z \& \bar{Y}$ ; б)  $(X \rightarrow Z) \rightarrow ((X \vee Y) \rightarrow (\bar{Z} \vee Y))$ ;  
 8) а)  $((X \rightarrow Y \& Z) \rightarrow (\bar{Y} \rightarrow \bar{X})) \rightarrow \bar{Y}$ ; б)  $((X \rightarrow Y) \rightarrow Y) \rightarrow Y$ ;  
 9) а)  $(X \rightarrow Y) \& (Y \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow Z)$ ; б)  $X \rightarrow Y \oplus Z$ .

**2.6. Докажите равносильность, применяя закон де Моргана.**

- 0)  $X \& \bar{Y} \& (Z \vee \bar{X}) \equiv Y \vee \bar{X} \vee \bar{Z}$ ;  
 1)  $\bar{X} \vee (\bar{Y} \vee Z) \vee X \& \bar{Y} \equiv X \& \bar{Z} \& Y$ ;  
 2)  $\bar{X} \& Y \& \bar{Z} \vee X \equiv (\bar{Y} \vee Z) \& \bar{X}$ ;  
 3)  $\bar{Z} \vee X \vee \bar{Y} \& \bar{X} \& \bar{Y} \vee \bar{Z} \equiv \bar{Z}$ ;

- 4)  $\overline{X \& Y} \vee \overline{X \vee Y \& X} \equiv \overline{X} \vee \overline{Y}$ ;  
 5)  $X \vee \overline{Y \& Z} \vee \overline{X} \vee Y \vee \overline{Z} \equiv X \vee Z \vee \overline{Y}$ ;  
 6)  $\overline{X \& (Y \vee Z)} \vee \overline{X \& Y} \equiv \overline{X} \vee (\overline{Y} \& Z)$ ;  
 7)  $\overline{Y \& \overline{X \vee Z} \vee \overline{Y} \vee X} \equiv Y \& Z \vee \overline{x}$ ;  
 8)  $\overline{\overline{X} \vee Y \& X \& Z \vee \overline{Y}} \equiv Y \& \overline{Z} \& X$ ;  
 9)  $\overline{X \vee \overline{Y}} \& \overline{X \vee \overline{Y}} \& X \equiv Y \vee \overline{X}$ .

### 2.7. Упростите формулы алгебры логики:

- 0) a)  $(X \rightarrow Y) \& (X \vee Y)$ ; b)  $\overline{B} \vee \overline{A} \& A \oplus C$ ; c)  $X \downarrow Y \& X / \overline{X}$ ;  
 1) a)  $X \vee Y \rightarrow X \& \overline{Y}$ ; b)  $C \rightarrow B \oplus \overline{A} \& C$ ; c)  $X \vee Y \downarrow \overline{X \& Y}$ ;  
 2) a)  $(X \vee Y) \& (\overline{X} \rightarrow Z)$ ; b)  $\overline{A} \& B \rightarrow C \oplus \overline{B}$ ; c)  $Y \rightarrow \overline{X} \oplus Y \downarrow \overline{Y}$ ;  
 3) a)  $X \vee (X \& Y \rightarrow \overline{X})$ ; b)  $A \sim C \vee \overline{B} \oplus \overline{A}$ ; c)  $\overline{X} \downarrow \overline{X} \& \overline{Y} \rightarrow \overline{X}$ ;  
 4) a)  $Y \vee Z \rightarrow Y \& \overline{X}$ ; b)  $C \& \overline{A} \rightarrow \overline{B} \sim A$ ; c)  $X \oplus \overline{X} \vee \overline{Y} \downarrow X$ ;  
 5) a)  $\overline{Y} \rightarrow \overline{Y} \& X \rightarrow \overline{Y}$ ; b)  $B \oplus \overline{C} \& \overline{A} \sim B$ ; c)  $X \rightarrow Y / \overline{X} \& \overline{Y}$ ;  
 6) a)  $\overline{X \vee Y} \rightarrow X \& Z$ ; b)  $A \& B \rightarrow \overline{B} \sim \overline{C}$ ; c)  $X \& \overline{X} \rightarrow \overline{Y} / Y$ ;  
 7) a)  $Z \& X \rightarrow Y \vee \overline{Z}$ ; b)  $\overline{A} \vee B \oplus C \& \overline{B}$ ; c)  $X \rightarrow Y \oplus \overline{X} / \overline{Y}$ ;  
 8) a)  $\overline{\overline{X} \& \overline{Y}} \rightarrow X \vee Y$ ; b)  $\overline{C} \rightarrow \overline{A} \vee A \sim \overline{B}$ ; c)  $\overline{X} \downarrow \overline{Y} \& \overline{X \rightarrow Y}$ ;  
 9) a)  $\overline{X} \& \overline{Y} \vee Y \rightarrow \overline{Y}$ ; b)  $\overline{B} \sim C \oplus \overline{A} \vee B$ ; c)  $Y \rightarrow \overline{X} \downarrow \overline{Y \vee X}$ .

### 2.8. Упростите формулы, используя законы поглощения и склеивания: $(a \& b) \vee (\overline{a} \& b) \equiv b$ ; $(a \vee b) \& (\overline{a} \vee b) \equiv b$

- 0)  $X \& Y \& (X \& Z \vee X \& Y) \equiv$   
 1)  $X \& Y \& Z \vee \overline{x} \& Y \& Z \equiv$   
 2)  $X \vee X \& Y \vee X \& Y \& Z \vee X \& P \& F \equiv$   
 3)  $X \& Y \& Z \vee X \& \overline{Y} \& Z \equiv$   
 4)  $X \& Y \vee X \& Y \& Z \vee X \& Y \& P \equiv$   
 5)  $\overline{X \& Y} \& Z \vee X \& Y \& Z \equiv$   
 6)  $(\overline{x \vee y \vee Z}) \& (\overline{x \vee Y \vee Z}) \equiv$   
 7)  $X \& (X \vee Y) \& (X \vee Z) \equiv$   
 8)  $(X \vee Y \vee Z) \& (X \vee \overline{y \vee Z}) \equiv$   
 9)  $\overline{X \vee Y} \& \overline{X \& Y} \equiv$

### Тема 3. Логические функции. Суперпозиции функций

*Логической функцией* называют функцию  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  аргументы которой  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и сама функция принимают значения 0 или 1. Для  $n = 0$  – (*нульарные функции*) существует 2 различные логические функции, значения: константы 1 (истина) и 0 (ложь);

$n = 1$  (*унарные функции*) существует 4 различных логических функций, значения:  $g_1(x) = 0$ ,  $g_2(x) = \neg x$ ,  $g_3(x) = x$ ,  $g_4(x) = 1$ ,

$n = 2$  (*бинарные функции*) существует 16 различных логических функций:

$$f_0(x, y) = 0 = g_1(0)$$

$$f_1(x, y) = x \& y$$

$$f_2(x, y) = \neg(x \rightarrow y)$$

$$f_3(x, y) = x = g_3(x)$$

$$f_4(x, y) = \neg(y \rightarrow x)$$

$$f_5(x, y) = y = g_3(y)$$

$$f_6(x, y) = x \oplus y$$

$$f_7(x, y) = x \vee y$$

$$f_8(x, y) = \neg(x \vee y) = x \downarrow y$$

$$f_9(x, y) = x \sim y$$

$$f_{10}(x, y) = \neg y = g_2(y)$$

$$f_{11}(x, y) = y \rightarrow x$$

$$f_{12}(x, y) = \neg x = g_2(x)$$

$$f_{13}(x, y) = x \rightarrow y$$

$$f_{14}(x, y) = \neg(x \& y) = x \downarrow y$$

$$f_{15}(x, y) = 1 = g_4(1)$$

$n = 3$  существует 256 различных логических функций и т.д.

Существуют три вида представления логической функции:

- *аналитический* (формула);
- *табличный* (таблица истинности);
- *графический* (функциональная схема).

Результат вычисления булевой функции может быть использован в качестве одного из аргументов другой функции. Итог такой операции - *суперпозиции* можно рассматривать как новую булеву функцию со своей таблицей истинности.

Наборы  $x$  и  $y$  значений переменных называются *соседними* по  $i$ -той переменной, если они отличаются только  $i$ -той координатой.

Переменная  $x_i$  называется *фиктивной переменной* логической функции  $f$ , если для любых наборов  $x, y$ , соседних по  $i$ -той переменной, выполняется равенство:  $f(x) = f(y)$ .

Переменная  $x_i$  называется *существенной переменной* логической функции  $f$ , если существует, хотя бы одна пара  $x, y$  наборов значений переменных, соседних по  $i$ -той переменной, такая, что справедливо неравенство:  $f(x) \neq f(y)$ .

## Применение логических функций для анализа и синтеза дискретных устройств

Преобразование информации в блоках ПК производится логическими устройствами двух типов: комбинационными схемами и цифровыми автоматами с памятью.

Логический элемент **И** (*конъюнктор*) реализует операцию логического умножения (рис. 1). Логический элемент **ИЛИ** (*дизъюнктор*) реализует операцию логического сложения (рис. 2). Логический элемент **НЕ** (*инвертор*) реализует операцию отрицания (рис. 3). Логический элемент **И-НЕ** реализует функцию штрих Шеффера (рис. 4). Логический элемент **ИЛИ-НЕ** реализует функцию стрелка Пирса (рис. 5).

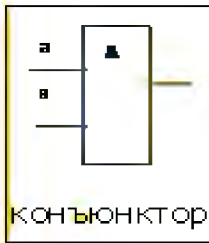


Рисунок 1



Рисунок 2



Рисунок 3



Рисунок 4

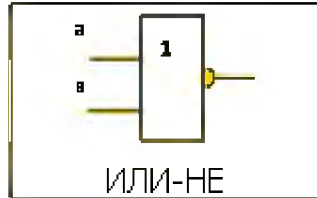


Рисунок 5

### Примеры выполнения заданий

1. Найдите суперпозицию функций для формулы:  $B \sim \neg(A \vee B) \rightarrow A$

Решение: определим порядок выполнения операций и запишем их с помощью элементарных функций от одной или двух переменных:

$g_3(b)=B$ ;  $g_3(a)=A$ ;  $f_8(a, b) = \neg(A \vee B)$ ;  $f_{11}(a, b)=A \rightarrow B$ ;  $f_9(a, b)=A \sim B$ ;

Итак:  $f_9(g_3(b), f_{11}(f_8(g_3(a), g_3(b)), g_3(a)))$ .



2. Получите таблицу функции  $G(x,y) = f_2(y, y, f_1(x, y, x))$ , являющейся суперпозицией функций  $f_2$  и  $f_1$ , если:  $f_1 = (1001\ 0111)$ ;  $f_2 = (0110\ 1011)$ .

Решение: запишем таблицу функций в развернутом виде:

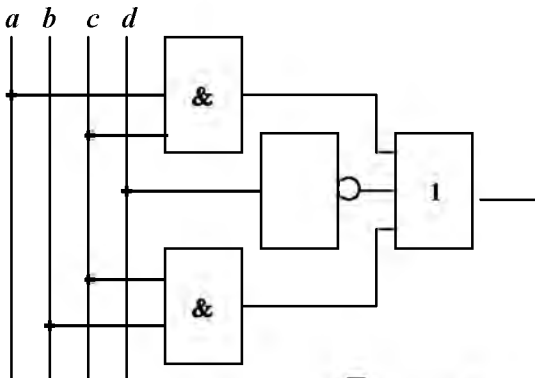
$xyz$	$f_1$	$f_2$
000	1	0
001	0	1
010	0	1
011	1	0
100	0	1
101	1	0
110	1	1
111	1	1

Составим таблицу функции  $G(x,y) = f_2(y, y, f_1(x, y, x))$ :

$x$	$y$	$f_1(x, y, x)$	$f_2(y, y, f_1(x, y, x))$
0	0	1 0 0 0	1 0 0 1
0	1	0 0 1 0	1 1 1 0
1	0	1 1 0 1	1 0 0 1
1	1	1 1 1 1	1 1 1 1

Итак,  $G(x,y) = (1,1,1,1)$ .

3. Укажите функцию  $F(a, b, c, d)$ , реализуемую схемой из функциональных элементов предварительно упростив:



Итак,  $F(a, b, c, d) = a \& c \vee \bar{d} \vee c \& b \equiv c \& (a \vee b) \vee \bar{d}$ .

4. Для данной функции  $f(x,y,z) = (0101\ 1010)$  выясните, какие переменные являются существенными, а какие - фиктивными. Выразите  $f(x,y,z)$  формулой, содержащей только существенные переменные.

Решение: запишем таблицу функции в развернутом виде:

Переменная  $x$  является существенной, т.к., например, наборы  $(0,0,0)$  и  $(1,0,0)$  являются соседними по переменной  $x$  и  $f(0,0,0) \neq f(1,0,0)$ .

Переменная  $z$  является существенной, т.к., например, наборы  $(0,0,0)$  и  $(1,0,0)$  являются соседними по переменной  $z$  и  $f(0,0,0) \neq f(0,0,1)$ .

Переменная  $y$  является фиктивной, т.к. на всех наборах, соседних с переменной  $y$ , значения функции равны, т.е. выполняется равенства:

$xyz$	$f_1$
000	0
001	1
010	0
011	1
100	1
101	0
110	1
111	0

$$f(0,0,0)=f(0,1,0), f(1,0,0)=f(1,1,0), f(0,0,1)=f(0,1,1), f(1,0,1)=f(1,1,1).$$

Выпишем таблицу функции  $f$  от существенных переменных:

$x$	$z$	$f$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Итак,  $f(x,z) = x \oplus z$ .

### Задания для самостоятельного выполнения

3.1. Получите таблицу функции  $G(x,y)$ , являющейся суперпозицией функций  $f_n$  и  $f_k$ , если:

$$\begin{aligned} f_1 &= (1001 \ 0111); \ f_2 = (0110 \ 1011); \ f_3 = (1110 \ 0110); \ f_4 = (0111 \ 0011); \\ f_5 &= (1100 \ 0111); \ f_6 = (1001 \ 0100); \ f_7 = (1011 \ 0101); \ f_8 = (1000 \ 0110); \\ f_9 &= (1010 \ 0110); \ f_{10} = (0101 \ 1000). \end{aligned}$$

$N\circ$	$n$	$k$	$G(x,y)$
0)	1	2	$f_n(x, f_k(x, x, y), y);$
1)	3	5	$f_n(x, f_k(y, x, y), y);$
2)	4	3	$f_n(x, f_k(y, y, x, y), y);$
3)	3	2	$f_n(y, f_k(x, y, x), x);$
4)	7	8	$f_n(y, f_k(x, y, x), y);$
5)	5	9	$f_n(x, f_k(y, x, x), y);$
6)	2	3	$f_n(x, f_k(x, y, y), y);$
7)	10	9	$f_n(x, f_k(x, x, y), y);$
8)	8	7	$f_n(f_k(x, y, y), y, x);$
9)	7	9	$f_n(f_k(y, y, x), x, y);$

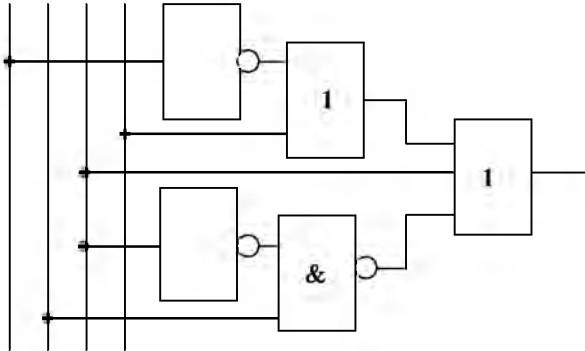
### 3.2. Найдите суперпозицию функций для формул:

- |   |   |
|---|---|
| 0) a) $\overline{X} \vee (Y \rightarrow \overline{X}) \& Z;$            | b) $A \& B \rightarrow B \vee A \downarrow \neg B;$       |
| 1) a) $\overline{Z} \sim Y \vee \overline{X} \rightarrow \overline{Y};$ | b) $\neg B \oplus A \& B \rightarrow A / B;$              |
| 2) a) $X \rightarrow Y \oplus \overline{Z} \vee \overline{X};$          | b) $\neg(A \& B) \downarrow \neg A \vee B \downarrow A;$  |
| 3) a) $\overline{X} \vee \overline{Y} \sim Z \rightarrow X;$            | b) $\neg(B \& A \vee \neg B) \rightarrow A \downarrow B;$ |
| 4) a) $X \vee (Y \oplus \overline{Z}) \rightarrow \overline{X};$        | b) $\neg(A \vee B \& A \sim B \downarrow A);$             |
| 5) a) $(X \rightarrow \overline{Y}) \vee \overline{X} \& Z;$            | b) $A \sim B / \neg A \oplus B \rightarrow A;$            |
| 6) a) $\overline{X} \vee \overline{Y} \rightarrow X \sim Y;$            | b) $A \& B \oplus \neg(A \vee B) \downarrow A;$           |
| 7) a) $\overline{X} \& \overline{Y} \vee Z \rightarrow X;$              | b) $B \sim A \oplus B \& A / \neg B;$                     |
| 8) a) $X \oplus Y \& \overline{Z} \rightarrow \overline{Y};$            | b) $B \& \neg A \vee \neg B \oplus A / B;$                |
| 9) a) $(X \sim \overline{Y} \rightarrow Z) \vee \overline{Z};$          | b) $B \vee A \downarrow B \oplus \neg A \& B.$            |

### 3.3. Укажите функцию $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , реализуемую схемой из функциональных элементов предварительно упростив:

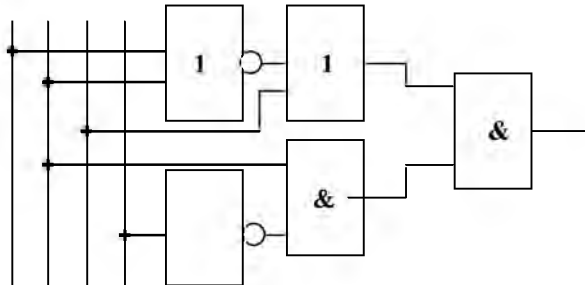
0)  $F(x_1, x_2, x_3, x_4) =$

$x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4$

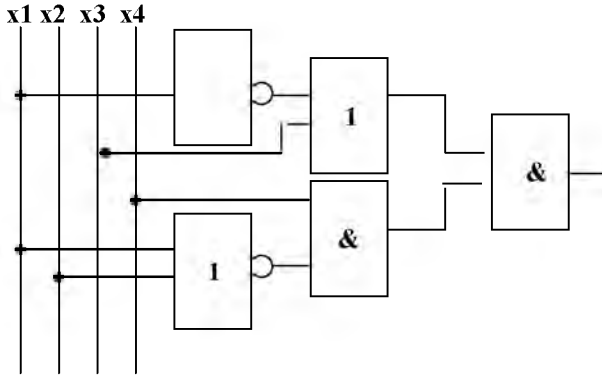


1)  $F(x_1, x_2, x_3, x_4) =$

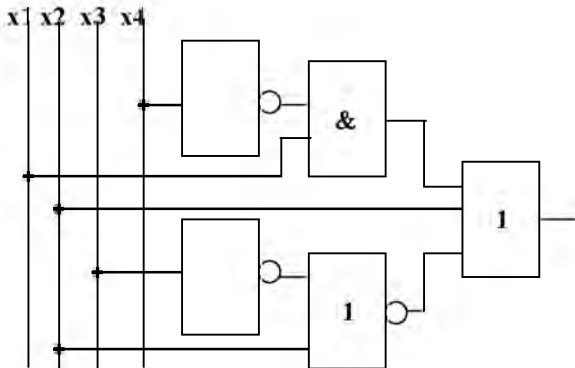
$x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4$



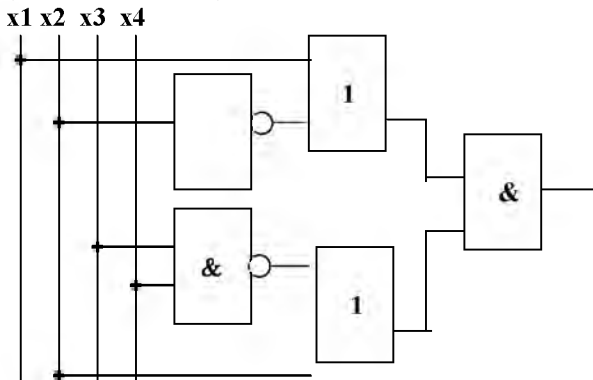
2)  $F(x1, x2, x3, x4) =$



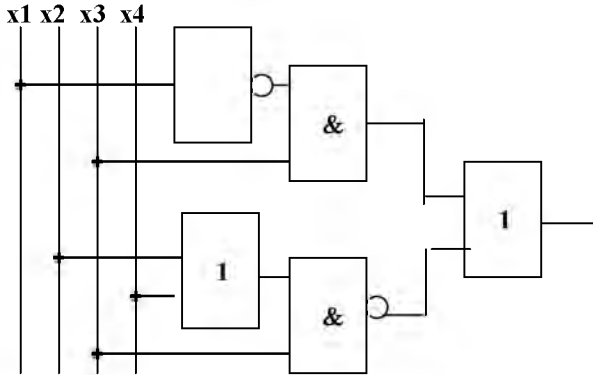
3)  $F(x1, x2, x3, x4) =$



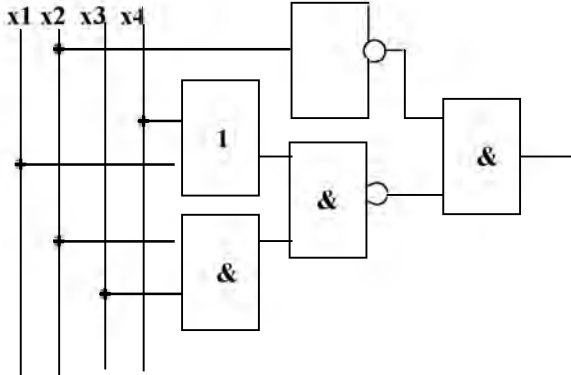
4)  $F(x1, x2, x3, x4) =$



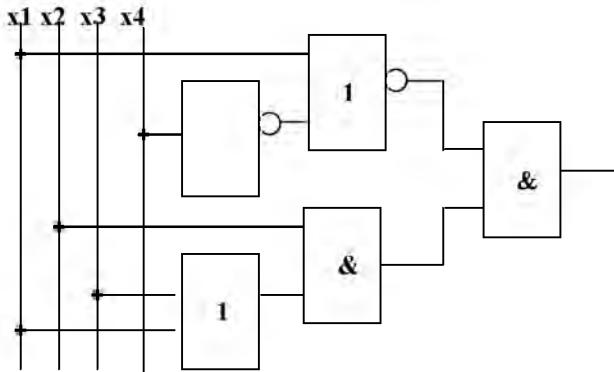
5)  $F(x_1, x_2, x_3, x_4) =$

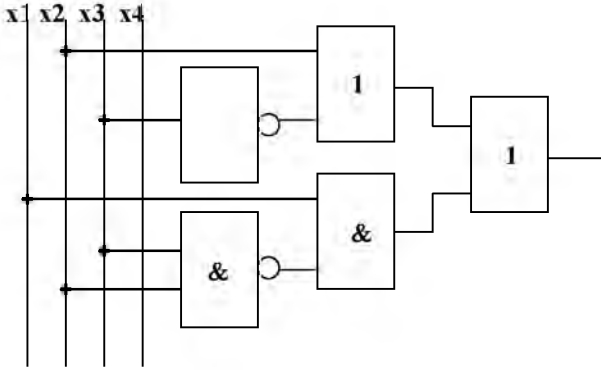
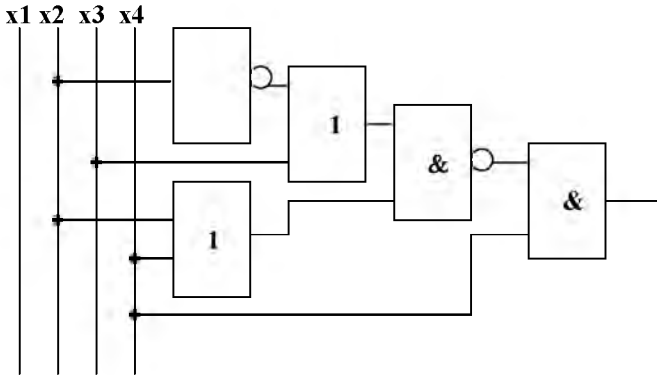


6)  $F(x_1, x_2, x_3, x_4) =$



7)  $F(x_1, x_2, x_3, x_4) =$



8)  $F(x1, x2, x3, x4) =$ 9)  $F(x1, x2, x3, x4) =$ 

3.4. Для данной функции  $f(x,y,z)$  выясните, какие переменные являются существенными, а какие - фиктивными. Выразите  $f(x,y,z)$  формулой, содержащей только существенные переменные.

Переменные			Варианты задания функции $f(x, y, z)$									
$x$	$y$	$z$	0)	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)
0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1

## Тема 4. Формы представления логических функций

Виды форм логических функций:

- *нормальная форма*, если булева функция выражена через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание переменных.
- *совершенная форма*, если функция записывается единственным образом.

*Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)* логической функции называется ее представление в виде дизъюнкции некоторых элементарных конъюнкций.

*Конъюнктивной нормальной формой (КНФ)* логической функции называется ее представление в виде конъюнкции некоторых элементарных дизъюнкций.

Существуют два класса совершенных форм: *совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ)* и *совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ)*.

***Механизм построения ДНФ:***

1. постройте таблицу истинности логической функции;
2. отметьте наборы переменных, на которых логическая функция истинна;
3. выпишите отмеченные наборы переменных, соединяя между собой операцией конъюнкции, а между наборами – дизъюнкцией. Причем, если переменная имеет ложное значение, то она берется с отрицанием, а если истинное значение, то без отрицания.

Упростив полученную ДНФ, получите СДНФ.

***Механизм построения КНФ:***

1. постройте таблицу истинности логической функции;
2. отметьте наборы переменных, на которых логическая функция ложна;
3. выпишите отмеченные наборы переменных, соединяя между собой операцией дизъюнкции, а между наборами – конъюнкцией. Причем, если переменная имеет ложное значение, то она берется без отрицания, а если истинное значение, то с отрицанием;

Упростив полученную КНФ, получите СКНФ.

*Полиномом Жегалкина* логической функции  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется ее представление в виде суммы по модулю два (строгой дизъюнкции) некоторых элементарных конъюнкций и константы 1.

Полином Жегалкина единственным образом представляет логическую функцию и может быть найден:

- с помощью эквивалентных преобразований ДНФ, выразив операции ИЛИ и НЕ через операции сложение по модулю два, и константу 1. Для этого применяются следующие соотношения:

$$a \vee b = a \oplus b \oplus a b, \quad \neg a = 1 \oplus a; \quad a \oplus a = 0; \quad (a \oplus b) c = a c \oplus b c$$

- с помощью эквивалентных преобразований СДНФ достаточно заменить все дизъюнкции на операции сложение по модулю два и избавиться от инверсий при помощи эквивалентного преобразования:  $\neg a = 1 \oplus a$ ;

- с помощью методов (неопределенных коэффициентов, карт Карно и метода треугольника).

### Примеры выполнения заданий

1. Постройте совершенные формы для функции  $\bar{a} \& b \oplus \bar{b}$ .

$a$	$b$	$\bar{a} \& b$	$\bar{a} \& b \oplus \bar{b}$
0	0	1 0 0	0 1 1
0	1	1 1 1	1 1 0
1	0	0 0 0	0 1 1
1	1	0 0 1	0 0 0

$$\begin{aligned} \text{СДНФ} &= \bar{a} \& \bar{b} \vee \bar{a} \& b \vee a \& \bar{b} \equiv \bar{a} \& (\bar{b} \vee b) \vee a \& \bar{b} \equiv \bar{a} \& 1 \vee a \& \bar{b} \equiv \\ &\equiv \bar{a} \vee a \& \bar{b} \equiv (\bar{a} \vee a) \& (\bar{a} \vee \bar{b}) \equiv 1 \& (\bar{a} \vee \bar{b}) \equiv \bar{a} \vee \bar{b}. \end{aligned}$$

$$\text{СКНФ} = \bar{a} \vee \bar{b}.$$

2. Логическая функция  $f(x,y,z) = x \oplus (z \rightarrow \neg x) \& y$  задана аналитически. Переведите ее в другие виды представления:

Решение: построим таблицу истинности.

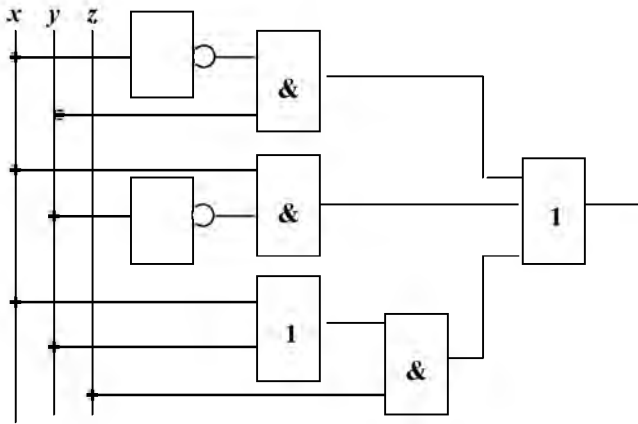
$xyz$	$z \rightarrow \neg x$	$(z \rightarrow \neg x) \& y$	$x \oplus (z \rightarrow \neg x) \& y$
000	0 1 1	1 0 0	0 0 0
001	1 1 1	1 0 0	0 0 0
010	0 1 1	1 1 1	0 1 1
011	1 1 1	1 1 1	0 1 1
100	0 1 0	1 0 0	1 1 0
101	1 0 0	0 0 0	1 1 0
110	0 1 0	1 1 1	1 0 1
111	1 0 0	0 0 1	1 1 0



Для представления функции в графическом виде, удобнее найти СКНФ:

$$\begin{aligned}
 \text{СКНФ} &= (x \vee y \vee z) \& (x \vee y \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) = \\
 &= (x \vee y \vee (z \& \bar{z})) \& (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) = (x \vee y \vee 0) \& (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) = \\
 &= (x \vee y) \& (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) = (x \vee y) \& \bar{x} \vee (x \vee y) \& \bar{y} \vee (x \vee y) \& z = \\
 &= x \& \bar{x} \vee y \& \bar{x} \vee x \& \bar{y} \vee y \& \bar{y} \vee (x \vee y) \& z = \\
 &= 0 \vee y \& \bar{x} \vee x \& \bar{y} \vee 0 \vee (x \vee y) \& z = y \& \bar{x} \vee x \& \bar{y} \vee (x \vee y) \& z.
 \end{aligned}$$

Построим функциональную схему для  $f(x, y, z) = y \& \bar{x} \vee x \& \bar{y} \vee (x \vee y) \& z$



3. Выясните, верно ли равенство, отыскав полином Жегалкина для логической функций в обеих частях этого равенства:  $x \sim y = xy \vee \bar{x} \bar{y}$

Решение:  $x \sim y = \overline{x \oplus y} = x \oplus y \oplus 1$

$$\begin{aligned}
 xy \vee \bar{x} \bar{y} &= xy \bar{x} \bar{y} \oplus xy \oplus \bar{x} \bar{y} = 0 \oplus xy \oplus (x \oplus 1)(y \oplus 1) = \\
 &= xy \oplus xy \oplus x \oplus y \oplus 1 = x \oplus y \oplus 1.
 \end{aligned}$$

Итак, равенство верно.

4. Выясните, равносильны ли данные ДНФ функций:

$$f_1 = \bar{x} \bar{y} \vee x \bar{y} \vee y z, f_2 = x \bar{y} \vee x z, f_3 = \bar{y} \vee z, \text{ получив их СДНФ.}$$

Решение: преобразуем данные функции к СДНФ.

$$f_1 = \bar{x} \& \bar{y} \vee x \& \bar{y} \vee y \& z = \bar{y} \& (\bar{x} \vee x) \vee y \& z = \bar{y} \& 1 \vee y \& z = \bar{y} \vee y \& z$$

$$f_2 = x \& \bar{y} \vee x \& z = x \& (\bar{y} \vee z)$$

Итак,  $f_1 = f_3 \neq f_2$ . Следовательно, не равносильны.

5. Найдите полином Жегалкина для функции  $f(x, y, z) = (\bar{z} \rightarrow x) \& z \& \bar{x}$  а) с помощью эквивалентных преобразований ДНФ; б) с помощью эквивалентных преобразований СДНФ

Решение: а) найдем ДНФ функции, построив таблицу истинности.

xyz	$\bar{z} \rightarrow x$	$(\bar{z} \rightarrow x) \& z$	$(\bar{z} \rightarrow x) \& z \& \bar{x}$
000	1 0 0	0 0 0	0 0 1
001	0 1 0	1 1 1	1 1 1
010	1 0 0	0 0 0	0 0 1
011	0 1 0	1 1 1	1 1 1
100	1 1 1	1 0 0	0 0 0
101	0 1 1	1 1 1	1 0 0
110	1 1 1	1 0 0	0 0 0
111	0 1 1	1 1 1	1 0 0

$$\text{ДНФ} = \bar{x} \& \bar{y} \& z \vee \bar{x} \& y \& z$$

Выразим операции ИЛИ и НЕ через операции строгой дизъюнкции и константу 1 по формулам:  $a \vee b = a \oplus b \oplus ab$ ,  $\neg a = 1 \oplus a$ ;

$$\begin{aligned} \bar{x} \bar{y} z \vee x y z &= \bar{x} \bar{y} z \oplus x y z \oplus \bar{x} \bar{y} z x y z = (1 \oplus x)(1 \oplus y)z \oplus (1 \oplus x)yz = \\ &= (1 \oplus y \oplus x \oplus xy)z \oplus yz \oplus xyz = z \oplus zy \oplus xz \oplus xyz \oplus yz \oplus xyz = z \oplus xz \end{aligned}$$

б) Преобразуем ДНФ в СДНФ:

$$\text{ДНФ} = \bar{x} \& \bar{y} \& z \vee \bar{x} \& y \& z. \text{ СДНФ} = z \& \bar{x} \& (\bar{y} \vee y) = z \& \bar{x} \& 1 = z \& \bar{x}$$

Заменим все дизъюнкции на операции строгой дизъюнкции и избавимся от инверсий при помощи формулы:  $\neg a = 1 \oplus a$ .

$$z \& \bar{x} = z \& (1 \oplus x) = z \oplus zx.$$

Получили одинаковые полиномы Жегалкина, следовательно, вычисления сделаны верно.

### Задания для самостоятельного выполнения

4.1. Постройте совершенные формы для логических функций:

0) а)  $b \oplus a \sim c \vee b$ ;

б)  $A \& B \rightarrow B \vee A \downarrow \neg B$ ;

1) а)  $a \& b \vee \bar{b} \rightarrow c$ ;

б)  $\neg B \oplus A \& B \rightarrow A / B$ ;

2) а)  $(a \oplus b \vee c) \& c$ ;

б)  $\neg(A \& B) \downarrow \neg A \vee B \downarrow A$ ;

- 3) а)  $\overline{b \& a \oplus a} \rightarrow b$ ; б)  $\neg(B \& A \vee \neg B) \rightarrow A \downarrow B$ ;  
 4) а)  $\overline{(b \& c \vee a)} \& \overline{a}$ ; б)  $\neg(A \vee B \& A \sim B \downarrow A)$ ;  
 5) а)  $(a \rightarrow b) \sim (a \vee c)$ ; б)  $A \sim B / \neg A \oplus B \rightarrow A$ ;  
 6) а)  $(a \rightarrow b) \oplus c \& a$ ; б)  $A \& B \oplus \neg(A \vee B) \downarrow A$ ;  
 7) а)  $a \oplus b \vee \overline{a} \& \overline{b}$ ; б)  $B \sim A \oplus B \& A / \neg B$ ;  
 8) а)  $(a \sim b) \& (b \vee a)$ ; б)  $B \& \neg A \vee \neg B \oplus A / B$ ;  
 9) а)  $(a \rightarrow b) \oplus c \vee b$ ; б)  $B \vee A \downarrow B \oplus \neg A \& B$ .

4.2. Выясните, равносильны ли данные ДНФ функций  $f_1, f, f_3$ , получив их СДНФ.

№	$f_1$	$f_2$	$f_3$
0)	$\overline{y} \overline{z} \vee xz \vee \overline{x} \overline{y}$	$\overline{y} \overline{z} \vee \overline{x} y \vee \overline{x} \overline{y} \vee z \overline{y}$	$x \overline{y} \overline{z} \vee x y \overline{z} \vee \overline{x}$
1)	$x \overline{y} \overline{z} \vee xz \vee yz \overline{x}$	$x \overline{y} \overline{z} \vee z \vee y \overline{x}$	$x \overline{y} \vee yz$
2)	$\overline{y} \overline{z} \vee x y \overline{z} \vee z \overline{y} \overline{x}$	$x \overline{z} \vee \overline{x} \overline{y}$	$x \vee yz \overline{x}$
3)	$z \overline{y} \vee \overline{x} \overline{y} \vee yz \vee x \overline{y} \overline{z}$	$y \overline{x} \vee x \overline{y} \vee x \overline{z}$	$\overline{y} \vee \overline{z}$
4)	$\overline{y} \overline{z} \vee zx \vee y \overline{z}$	$xy \vee \overline{y} \overline{z}$	$x \vee \overline{z}$
5)	$y \overline{x} \overline{z} \vee xy \vee xz \overline{y}$	$yz \vee x \vee y \overline{x} \overline{z}$	$xz \vee y \overline{z}$
6)	$x \overline{z} \vee x \overline{y} \overline{z} \vee yz \overline{x}$	$y \overline{x} \vee z \overline{y}$	$y \vee xz \overline{y}$
7)	$xz \vee z \overline{x} \vee y \overline{x} \overline{z} \vee y \overline{z}$	$y \overline{x} \vee z \overline{y} \vee y \overline{z}$	$\overline{x} \vee \overline{z}$
8)	$xy \overline{z} \vee z \overline{x} \vee y \overline{x} \vee xz \overline{y}$	$y \overline{x} \vee z \overline{y} \vee y \overline{z}$	$z \overline{x} \vee y$
9)	$y \overline{x} \overline{z} \vee z \overline{x} \overline{y} \vee \overline{x} \overline{y}$	$z \overline{y} \vee \overline{x} \overline{z}$	$xy \overline{z} \vee z$

4.3. Логические функции заданы аналитически. Переведите их в другие виды представления:

- 0) а)  $(X \oplus Y) \& Z \rightarrow \neg X \vee \neg Z$ ; б)  $B \sim A \oplus B \& A / \neg B$ ;  
 1) а)  $X \sim (\neg Y \oplus Z) \vee \neg Y \& X$ ; б)  $A \& B \oplus \neg(A \vee B) \downarrow A$ ;  
 2) а)  $(X \rightarrow \neg Y) \oplus Z \vee X \vee \neg Z$ ; б)  $\neg(B \& A \vee \neg B) \rightarrow A \downarrow B$ ;  
 3) а)  $\neg X \vee Y \oplus (\neg Z \sim X) \& Z$ ; б)  $B \vee A \downarrow B \oplus \neg A \& B$ ;  
 4) а)  $X \vee \neg Z \& Y \oplus (\neg Z \sim Y)$ ; б)  $A \sim B / \neg A \oplus B \rightarrow A$ ;  
 5) а)  $(X \oplus \neg Y) \& Z \vee \neg X \rightarrow Y$ ; б)  $\neg(A \vee B \& A \sim B \downarrow A)$ ;  
 6) а)  $\neg X \vee Y \rightarrow Z \& (\neg Y \sim X)$ ; б)  $B \& \neg A \vee \neg B \oplus A / B$ ;  
 7) а)  $(X \rightarrow Y) \oplus Z \sim \neg Y \& \neg Z$ ; б)  $\neg(A \& B) \downarrow \neg A \vee B \downarrow A$ ;

- 8) а)  $(X \& Y \rightarrow Z) \vee X \oplus Y$ ; б)  $A \& B \rightarrow B \vee A \downarrow \neg B$ ;  
 9) а)  $((X \rightarrow Y \& \neg Z) \oplus \neg X) \vee X$ ; б)  $\neg B \oplus A \& B \rightarrow A / B$ .

**4.4. Логические функции  $f(x, y, z)$  заданы таблично. Представьте функции формулой алгебры логики и функциональной схемой:**

Переменные			Варианты задания функции $f(x, y, z)$									
$x$	$y$	$z$	0)	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)
0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1

**4.5. Логические функции заданы аналитически. Докажите, что СДНФ и СКНФ функций совпадают:**

- 0) а)  $\overline{X} \vee (Y \rightarrow \overline{X}) \& Z$ ; б)  $A \rightarrow B \oplus (C \vee A) \& \neg B$ ;  
 1) а)  $\overline{Z} \sim Y \vee \overline{X} \rightarrow \overline{Y}$ ; б)  $B \vee A \& (\neg B \rightarrow A) \& C$ ;  
 2) а)  $X \rightarrow Y \oplus \overline{Z} \vee \overline{X}$ ; б)  $B \& \neg C \sim (\neg A \vee B) \& A$ ;  
 3) а)  $\overline{X} \vee \overline{Y} \sim Z \rightarrow X$ ; б)  $(\neg B \oplus A) \& \neg C \oplus \neg A \vee B$ ;  
 4) а)  $X \vee (Y \oplus \overline{Z}) \rightarrow \overline{X}$ ; б)  $\neg A \vee \neg B \vee (C \rightarrow B) \sim A$ ;  
 5) а)  $(X \rightarrow \overline{Y}) \vee \overline{X} \& Z$ ; б)  $A \sim (B \rightarrow \neg A) \oplus C \& A$ ;  
 6) а)  $\overline{X} \vee \overline{Y} \rightarrow X \sim Y$ ; б)  $\neg A \& (C \oplus \neg A) \vee B \rightarrow A$ ;  
 7) а)  $\overline{X} \& \overline{Y} \vee Z \rightarrow X$ ; б)  $(\neg B \sim \neg A) \oplus B \& C \vee \neg B$ ;  
 8) а)  $X \oplus Y \& \overline{Z} \rightarrow \overline{Y}$ ; б)  $A \& (\neg A \vee \neg C) \rightarrow A \oplus B$ ;  
 9) а)  $(X \sim \overline{Y} \rightarrow Z) \vee \overline{Z}$ ; б)  $C \vee \neg A \& (B \oplus \neg A) \sim B$ .

**4.6. Найдите полином Жегалкина для заданных ДНФ функций  $f_1, f_2, f_3$ , с помощью их эквивалентных преобразований:**

$N_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
0)	$xz \vee x \overline{y} \vee z \overline{y}$	$y \overline{x} \overline{z} \vee y \vee x \overline{y}$	$x \overline{y} \overline{z} \vee x \overline{y} \overline{z} \vee x \overline{y}$
1)	$x \overline{y} \overline{z} \vee x \overline{z} \vee y \overline{z} \overline{x}$	$x \overline{y} \overline{z} \vee z \vee y \overline{x}$	$x \overline{y} \vee y \overline{z} \vee x \overline{y} \overline{z}$
2)	$x \overline{z} \vee y \overline{z} \vee z \overline{y} \overline{x}$	$x \overline{z} \vee x \overline{y} \vee y \overline{z} \overline{x}$	$y \overline{z} \vee x \vee y \overline{z} \overline{x}$

3)	$\overline{x} \overline{y} \vee y \overline{z} \vee x \overline{y} \overline{z}$	$y \overline{x} \vee x \overline{y} \vee x \overline{z}$	$z \overline{x} \overline{y} \vee y \vee x \overline{z}$
4)	$\overline{y} \overline{z} \vee z \overline{x} \vee y \overline{z}$	$xy \vee y \overline{z} \vee z \overline{y} \overline{x}$	$\overline{y} \overline{z} \vee xzy \vee \overline{z}$
5)	$y \overline{x} \overline{z} \vee xy \vee xz \overline{y}$	$y \overline{z} \vee x \vee y \overline{x} \overline{z}$	$xz \vee y \overline{z} \vee y \overline{z}$
6)	$\overline{x} \overline{z} \vee x \overline{y} \overline{z} \vee y \overline{z} \overline{x}$	$zyx \vee x \vee z \overline{y}$	$y \vee xz \overline{y} \vee z \overline{y}$
7)	$xz \vee z \overline{x} \vee y \overline{x} \overline{z}$	$\overline{x} \vee z \overline{x} \overline{y} \vee y \overline{z}$	$xzy \vee \overline{z} \vee y \overline{x}$
8)	$xyz \vee z \overline{x} \vee xz \overline{y}$	$y \overline{x} \vee y \vee x \overline{y} \overline{z}$	$z \overline{x} \vee y \vee z \overline{y} \overline{x}$
9)	$\overline{x} \overline{z} \vee z \overline{x} \overline{y} \vee x \overline{y}$	$zx \overline{y} \vee y \overline{z} \vee \overline{x} \overline{z}$	$z \overline{y} \vee x \overline{y} \overline{z} \vee z$

**4.7. Найдите полином Жегалкина для следующих функций с помощью эквивалентных преобразований полученных ДНФ:**

- |  |   |
|--|---|
| 0) a) $Y \& Z \rightarrow \neg X \vee \neg Z;$ | b) $B \sim A \oplus C \& \neg B;$           |
| 1) a) $X \oplus Z \vee \neg Y \& X;$           | b) $C \& \neg B \oplus B \rightarrow A;$    |
| 2) a) $X \rightarrow \neg Y \& X \vee \neg Z;$ | b) $\neg B \rightarrow A \vee B \& \neg C;$ |
| 3) a) $\neg Y \vee \neg Z \sim X \& Z;$        | b) $B \vee C \oplus \neg A \& \neg B;$      |
| 4) a) $\neg Z \& Y \oplus \neg Z \sim X;$      | b) $C \sim \neg A \oplus B \& A;$           |
| 5) a) $\neg Y \& Z \vee \neg X \rightarrow Y;$ | b) $A \vee \neg C \sim B \rightarrow A;$    |
| 6) a) $Y \rightarrow Z \& \neg Y \sim X;$      | b) $\neg A \vee \neg B \oplus C \& B;$      |
| 7) a) $X \sim Z \rightarrow Y \& \neg Z;$      | b) $A \oplus \neg B \& \neg A \vee C;$      |
| 8) a) $Y \oplus Z \vee X \sim Y;$              | b) $A \& B \rightarrow \neg C \vee \neg B;$ |
| 9) a) $Y \& \neg Z \rightarrow \neg X \vee Y;$ | b) $B \vee A \oplus B \rightarrow \neg C.$  |

**4.8. Найдите полином Жегалкина для следующих функций с помощью эквивалентных преобразований полученной СДНФ:**

- |  |   |
|--|---|
| 0) a) $\neg Z \oplus X \vee \neg Y;$           | b) $C \oplus A \sim \neg C \& \neg B;$          |
| 1) a) $Y \rightarrow \neg Z \& Y \vee X;$      | b) $A \rightarrow B \oplus \neg B \vee A;$      |
| 2) a) $\neg Y \& X \vee \neg Z \oplus Y;$      | b) $B \rightarrow \neg A \vee \neg B \& C;$     |
| 3) a) $X \& \neg Z \rightarrow Y \vee \neg Z;$ | b) $C \oplus \neg A \vee B \& \neg A;$          |
| 4) a) $Z \sim \neg Y \oplus \neg Z \& X;$      | b) $\neg B \& A \oplus B \sim A;$               |
| 5) a) $X \& \neg Z \rightarrow X \vee Y;$      | b) $\neg C \vee A \rightarrow B \sim A;$        |
| 6) a) $\neg Y \sim Z \& \neg Y \rightarrow X;$ | b) $\neg B \oplus C \& B \vee \neg A;$          |
| 7) a) $X \& \neg Z \rightarrow Y \sim Z;$      | b) $C \oplus \neg B \& \neg A \vee C;$          |
| 8) a) $\neg Y \vee Z \sim X \oplus Y;$         | b) $\neg C \vee \neg A \& C \oplus B;$          |
| 9) a) $Y \rightarrow Z \vee \neg X \& \neg Y;$ | b) $A \oplus B \rightarrow \neg C \vee \neg B.$ |

**4.9. Логические функции  $f(x, y, z)$  заданы таблично. Найдите полином Жегалкина разными способами**

Переменные			Варианты задания функции $f(x, y, z)$									
$x$	$y$	$z$	0)	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1

**4.10. Выясните, верны ли следующие равенства, отыскав полиномы Жегалкина для логических функций в обеих частях этого равенства:**

- 0)  $X \rightarrow (Y \rightarrow Z) = (X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Z)$ ;
- 1)  $(X \& Y \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow Z) = \neg X \vee Y \vee Z$ ;
- 2)  $X \& Y \rightarrow Z = (X \rightarrow Z) \& (Y \rightarrow Z)$ ;
- 3)  $(X \sim Y) \& (X \neg Y \vee Y) = X \& Y$ ;
- 4)  $\neg (X \sim \neg Y) = X \sim Y$ ;
- 5)  $Z \rightarrow X \vee Y = (Z \rightarrow X) \rightarrow (X \rightarrow Y)$ ;
- 6)  $X \sim Y = (X \& Z \sim Y \& Z) \& (X \vee Z \sim Y \vee Z)$ ;
- 7)  $X \& Y \vee (Z \rightarrow X) = \neg X \rightarrow \neg Z$ ;
- 8)  $(X \rightarrow Y) \rightarrow Z = X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$ ;
- 9)  $(X \rightarrow Z) \& (Y \rightarrow Z) = X \vee Y \rightarrow Z$ .

## Тема 5. Полнота логических функций

Многие логические функции могут быть выражены через другие с использованием суперпозиции. Например, с помощью дизъюнкции и отрицания можно, используя законы де Моргана, получить конъюнкцию.

Кроме того, любая логическая функция (за исключением тождественного нуля) может быть представлена в виде ДНФ. Как определить, будет ли данный набор функций достаточным, чтобы представить любую логическую функцию? Такие наборы называются функционально полными. Система логических функций  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  называется *полной*, если произвольная логическая функция может быть выражена в

виде суперпозиции функций  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Например, полной является система функций  $\{\neg, \&, \vee\}$ .

Теорема Поста даёт ответ на поставленный выше вопрос, а поскольку условие теоремы является необходимыми и достаточным, её называют также критерием:

*Система булевых функций  $F$  является полной тогда и только тогда, когда она целиком не принадлежит ни одному из замкнутых классов  $T_0, T_1, L, M, S$ .*

Множество функций замкнуто относительно операции суперпозиции, если любая суперпозиция функций из данного множества тоже входит в это же множество.

Замкнутые классы булевых функций:

- *класс  $T_0$  функции, сохраняющие ноль* (функция от нуля даёт ноль, т.е.  $f(0, 0, \dots, 0) = 0$ );
- *класс  $T_1$  функции, сохраняющие единицу* (функция от единицы даёт единицу, т.е.  $f(1, 1, \dots, 1) = 1$ );
- *класс  $L$  линейные функции* (функция представима многочленом, в котором каждый член состоит из переменных первой степени);
- *класс  $M$  монотонные функции* (функция монотонно не убывает по каждому из своих аргументов);
- *класс  $S$  самодвойственные функции* (на противоположных наборах функция принимает противоположные значения).

### **Примеры выполнения заданий**

1. Докажите, что логическая функция линейна:  $xyz \vee xz \bar{y} \vee x \bar{y} z \vee x \bar{z} \bar{y}$

Решение: для доказательства надо найти полином Жегалкина функции. Если степень полинома не выше первой, то функция линейна.

$$\begin{aligned} xyz \vee xz \bar{y} \vee x \bar{y} z \vee x \bar{z} \bar{y} &= xz (y \vee \bar{y}) \vee x \bar{z} (y \vee \bar{y}) = xz \vee x \bar{z} = \\ &= xz \vee (x \oplus 1)(z \oplus 1) = xz \vee (xz \oplus x \oplus z \oplus 1) = \\ &= xz \oplus x \oplus z \oplus 1 = x \oplus z \oplus 1 \end{aligned}$$

Получили полином 1-й степени, значит функция линейна.

2. Найдите двойственную функцию для  $f(x, y, z) = \neg(\bar{x} \rightarrow z) \vee (x \rightarrow z) \bar{y}$

Решение: найдем функцию  $f^*(x, y, z)$ , двойственную для  $f(x, y, z)$ .

$$\begin{aligned} f^*(x, y, z) &= \neg f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \neg(\neg(x \rightarrow \bar{z}) \vee (\bar{x} \rightarrow \bar{z}) \bar{y}) = \\ &= (x \rightarrow \bar{z}) \& \neg(\bar{x} \rightarrow \bar{z}) \vee \bar{y} = (\bar{x} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \& z \vee \bar{y}) = \end{aligned}$$

$$= \overline{x}(\overline{x} \overline{z} \vee \overline{y}) \vee \overline{z}(\overline{x} z \vee \overline{y}) = \overline{x} \overline{x} \overline{z} \vee \overline{x} \overline{y} \vee \overline{z} \overline{x} z \vee \overline{z} \overline{y} = \overline{x} \overline{y} \vee \overline{x} z \vee \overline{z} \overline{y}$$

3. Выясните, является ли функция  $f(x, y, z) = (x \vee \overline{y})(\overline{x} \vee y)z \vee \overline{x}yz \vee x \overline{z} \overline{y}$  монотонной?

Решение: представим функцию в табличном виде.

$xyz$	$x \vee \overline{y}$	$\overline{x} \vee y$	$(x \vee \overline{y})(\overline{x} \vee y)z$	$\overline{x}yz$	$x \overline{z} \overline{y}$	$f(x, y, z)$		
000	0 1 1	1 1 0	1 1 0 0	100 0	011 0	000	0	
001	0 1 1	1 1 0	1 1 1 1	101 0	001 0	100	1	
010	0 0 0	1 1 1	0 1 0 0	110 0	010 0	000	0	
011	0 0 0	1 1 1	0 1 1 0	111 1	000 0	010	1	
100	1 1 1	0 0 0	1 0 0 0	000 0	111 1	001	1	
101	1 1 1	0 0 0	1 0 1 0	001 0	101 0	000	0	
110	1 1 0	0 1 1	1 1 0 0	010 0	110 0	000	0	
111	1 1 0	0 1 1	1 1 1 1	011 0	100 0	100	1	

Рассмотрим наборы:  $(1, 0, 0) < (1, 0, 1)$ , но  $f(1, 0, 0) > f(1, 0, 1)$ .

Следовательно, данная функция не монотонна.

4. Для функции  $f(x, y, z) = (0010 \ 1000)$  выясните вопрос об ее принадлежности к классам Поста.

Решение: выпишем развернутую таблицу функций  $f$ :

$$f(0, 0, 0) = 0 \Rightarrow f \in T_0.$$

Следовательно,  $\{f\}$  – не является функционально полной.

$$f(1, 1, 1) = 0 \Rightarrow f \notin T_1;$$

$$(0, 1, 0) < (0, 1, 1), \text{ но } f(0, 1, 0) > f(0, 1, 1) \Rightarrow f \notin M;$$

$(0, 0, 0)$  и  $(1, 1, 1)$  – противоположные наборы,

$$f(0, 0, 0) = f(1, 1, 1) \Rightarrow f \notin S;$$

$$f(x, y, z) = (x \oplus 1)y(z \oplus 1) \oplus x(y \oplus 1)(z \oplus 1) =$$

$$= xyz \oplus xy \oplus yz \oplus y \oplus xyz \oplus xy \oplus xz \oplus x =$$

$$= xz \oplus yz \oplus x \oplus y.$$

$xyz$	$f$
000	0
001	0
010	1
011	0
100	1
101	0
110	0
111	0

Так как в полиноме Жегалкина для функции  $f$  присутствуют конъюнкции, то  $f \notin L$ .

5. Выясните, можно ли из функции  $f(x, y, z) = (1001 \ 0100)$  с помощью суперпозиций получить функцию  $g(x, y, z) = (1001 \ 0110)$ ?

Решение: проверим  $f(x, y, z)$  на принадлежность к классам Поста.



$f(0, 0, 0)=1 \Rightarrow f \notin T_0$ ;  $f(1, 1, 1)=0 \Rightarrow f \notin T_1$ ;

$(0, 0, 0) < (0, 0, 1)$ , но  $f(0, 0, 0) > f(0, 0, 1) \Rightarrow f \notin M$ ;

$(0, 0, 1)$  и  $(1, 1, 0)$  – противоположные наборы,

$f(0, 0, 1) = f(1, 1, 0) \Rightarrow f \notin S$ ;

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x \oplus 1)(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus (x \oplus 1)yz \oplus x(y \oplus 1)z = \\ &= 1 \oplus x \oplus y \oplus z \oplus xy \oplus xz \oplus yz \oplus xyz \oplus yz \oplus xyz \oplus xz = \\ &= 1 \oplus x \oplus y \oplus z \oplus xy \oplus xz \end{aligned}$$

Т.к. в полиноме Жегалкина для функции  $f$  присутствуют конъюнкции, то  $f \notin L$ .

Итак, функция  $f(x, y, z)$  не принадлежит ни одному из классов Поста, значит система  $\{f\}$  функционально полна и с помощью суперпозиции из  $f$  можно получить любую логическую функцию, в частности  $g(x, y, z)$ .

### Задания для самостоятельного выполнения

#### 5.1. Докажите, что логические функции линейны:

- 0)  $\bar{x} \bar{z} \bar{y} \vee \bar{x} z \bar{y} \vee \bar{x} yz \vee xy \bar{z}$ ;
- 1)  $\bar{x} \bar{z} \bar{y} \vee \bar{x} y \bar{z} \vee x y \bar{z} \vee xyz$ ;
- 2)  $(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee z \vee \bar{y})$ ;
- 3)  $\neg(xy \rightarrow z) \vee (\bar{x} \vee \bar{y})(x \vee y)z$ ;
- 4)  $\bar{x}(x \oplus z) \vee (x \vee y \vee z \rightarrow \bar{x}yz)$ ;
- 5)  $\bar{x} \rightarrow y \vee \bar{z}$ ;
- 6)  $xyz \vee xy \bar{z} \vee xz \bar{y}$ ;
- 7)  $\neg((\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \rightarrow z)$ ;
- 8)  $\bar{x}(\bar{y}z \vee y\bar{z}) \vee (y \oplus z \oplus 1)x$ ;
- 9)  $y\bar{z} \oplus x \rightarrow \neg(x \sim x\bar{y})$ .

#### 5.2. Для логических функций найдите двойственные функции:

- 0)  $\bar{x}yz \vee \bar{z}x\bar{y} \vee xyz$ ;
- 1)  $\bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{z}\bar{y}$ ;
- 2)  $x(y \oplus z) \vee (\bar{x} \vee y \vee z \rightarrow \bar{x}yz)$ ;
- 3)  $\neg(z \rightarrow x \vee y) \vee x(y \oplus z)$ ;
- 4)  $xyz \oplus xy \oplus xz \oplus z$ ;
- 5)  $\bar{x}y \vee \neg(z \rightarrow x)$ ;
- 6)  $(z \rightarrow \bar{x}) \vee (x \rightarrow y)$ ;

- 7)  $(x \rightarrow (z \rightarrow y))(x \rightarrow (z \rightarrow \bar{y}))$ ;  
 8)  $\bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} y \bar{z} \vee x \bar{y} \bar{z} \vee x y \bar{z} \vee x y z$ ;  
 9)  $\bar{x} \bar{y} \vee yz \vee \bar{y} \bar{z}$ .

**5.3. Докажите, что данные логические функции самодвойственны:**

- 0)  $x(z \rightarrow y) \vee \neg(y \rightarrow z)$ ;  
 1)  $\bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z}$ ;  
 2)  $xy \vee xz \vee yz$ ;  
 3)  $\bar{x}y \vee \bar{x}\bar{z} \vee y\bar{z}$ ;  
 4)  $xy \oplus xz \oplus yz \oplus y \oplus z$ ;  
 5)  $\bar{x}\bar{z}y \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z} \vee xyz$ ;  
 6)  $\bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{z}y \vee xz\bar{y} \vee xyz$ ;  
 7)  $xz \oplus (x \oplus z)(y \oplus 1)$ ;  
 8)  $\neg(x \rightarrow y)(z \rightarrow z) \vee \neg(x \vee y)(z \rightarrow z)$ ;  
 9)  $(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$ .

**5.4. Выясните, какие из данных логических функций монотонны?**

- 0)  $xyz \oplus xy \oplus xz \oplus yz \oplus x \oplus y \oplus z$ ;  
 1)  $(x \oplus y)z \oplus \neg(x \oplus z)$ ;  
 2)  $(x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})$ ;  
 3)  $(x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$ ;  
 4)  $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z}y \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee xyz$ ;  
 5)  $xy(z \oplus 1) \oplus z$ ;  
 6)  $\bar{x}\bar{z}y \vee x\bar{y}z \vee (\bar{x}\bar{y} \oplus \bar{x} \oplus y)$ ;  
 7)  $\bar{x}(y \oplus z) \vee (\bar{x} \vee y \vee z \rightarrow xyz) \vee x((y \rightarrow z) \oplus 1)$ ;  
 8)  $xyz \oplus xz$ ;  
 9)  $xyz$ .

**5.5. Для функций  $f(x, y, z)$  и  $g(x, y, z)$  выясните вопрос об их принадлежности к классам Поста.**

№	$f(x, y, z)$	$g(x, y, z)$
0)	1100 0111	1101 1000
1)	1110 1010	0011 0101

2)	0100 1101	1100 1110
3)	1111 0100	1001 0110
4)	0110 1001	1101 0100
5)	1000 0010	0000 1101
6)	1011 1101	1100 0100
7)	1111 1010	0101 1111
8)	1000 0001	1110 1010
9)	1101 1100	0001 1010

5.6. Выясните, можно ли из функции  $f(x, y, z)$  с помощью суперпозиций получить функцию  $g(x, y, z)$ ?

№	$f(x,y,z)$	$g(x,y,z)$
0)	1001 0110	1110 0110
1)	1001 0100	1101 0100
2)	0111 1010	1000 0110
3)	1101 1010	1010 1010
4)	0110 1111	1010 0110
5)	1000 0110	1001 1000
6)	0110 1110	1001 0010
7)	1000 0110	1101 1001
8)	1100 0111	1001 1110
9)	1010 0110	1001 0110

5.7. Исследуйте на полноту следующие системы логических функций:

- 0)  $\{xy \vee \overline{y}z, 0, 1\}$
- 1)  $\{xy \vee xz \vee yz, \overline{x}, 1\}$
- 2)  $\{y \rightarrow xz, 0, 1\}$
- 3)  $\{x \oplus y \oplus z, xy, \overline{x}\}$
- 4)  $\{xy \oplus z, (x \sim y) \oplus z, 1\}$
- 5)  $\{(y \rightarrow x)(\overline{y} \rightarrow z), 0, 1\}$
- 6)  $\{x \oplus y \oplus z, \overline{x}\}$
- 7)  $\{xy \vee xz \vee yz, \overline{x}\}$
- 8)  $\{xy \oplus xz \oplus yz, 0, 1\}$
- 9)  $\{x \oplus y, 0, 1\}$

## Тема 6. Минимизация логических функций

Совершенные нормальные формы хотя и дают однозначные представления функции, но являются очень громоздкими. Реализация СНФ программно или схемотехнически является избыточной, что ведет к увеличению программного кода, поэтому существуют методы упрощения логической записи – минимизация.

*Минимальная ДНФ* данной функции  $f$  – ДНФ, имеющая наименьшее число символов переменных из всех ДНФ.

Методы минимизации булевых функций:

- метод Квайна;
- метод Квайна – Мак-Класки;
- метод неопределенных коэффициентов;
- метод Блейка - Порецкого.
- метод диаграмм Вейча;
- метод минимизирующих карт Карно;
- метод Петрика;
- минимизация частично определенных булевых функций;
- минимизация систем булевых функций.

### **Алгоритм метода неопределенных коэффициентов**

1. Исходное уравнение разбить на систему уравнений, равных числу строк в таблице истинности.
2. Напротив каждого выражения поставить соответствующее значение функции.
3. Выбрать строку, в которой значение функции  $f=0$  и приравнять все  $k_i=0$ .
4. Просмотреть строки, где функция имеет значение 1, и вычеркнуть все коэффициенты, встречающиеся в нулевых строках.
5. Проанализировать оставшиеся коэффициенты в единичных строках.
6. Используя правило, что дизъюнкция равна 1 если хотя бы один из  $k_i=1$ , выбрать min-термы минимального ранга. Причем отдавать предпочтение коэффициентам, встречающимся в нескольких уравнениях одновременно.
7. Записать исходный вид функции.

### **Алгоритм метода минимизации Квайна- Мак-Класки**

1. Все конституэнты единицы из СДНФ булевой функции  $f$  записываются их двоичными номерами.

2. Все номера разбиваются на непересекающиеся группы. Признак образования  $i$ -й группы:  $i$  единиц в каждом двоичном номере конституэнты единицы.
3. Склеивание производят только между номерами соседних групп. Склеиваемые номера отмечаются каким-либо знаком (зачеркиванием).
4. Производят всевозможные склеивания. Неотмеченные после склеивания номера являются простыми импликантами.

Нахождение минимальных ДНФ далее производится по импликантной матрице.

### **Примеры выполнения задания**

1. Минимизируйте методом неопределенных коэффициентов логическую функцию  $f$ , заданную набором:  $f(x_1, x_2, x_3) = (0, 2, 4, 7)$  Заполним таблицу коэффициентов, приравнивая значению функции:

	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_{12}$	$k_{13}$	$k_{23}$	$k_{123}$	$f$
0	0	0	0	00	00	00	000	1
1	0	0	1	00	01	01	001	0
2	0	1	0	01	00	10	010	1
3	0	1	1	01	01	11	011	0
4	1	0	0	10	10	00	100	1
5	1	0	1	10	11	01	101	0
6	1	1	0	11	10	10	110	0
7	1	1	1	11	11	11	111	1

Просмотрим выделенные цветом строки, где функция имеет значение 1, и вычеркнем все коэффициенты, встречающиеся в нулевых строках. Оставшиеся коэффициенты выделим белым цветом.

Проанализировать оставшиеся коэффициенты в единичных строках:

$$\begin{cases} k_{13}^{00} + k_{23}^{00} + k_{123}^{000} = 1 \\ k_{13}^{00} + k_{123}^{010} = 1 \\ k_{23}^{00} + k_{123}^{100} = 1 \\ k_{123}^{111} = 1 \end{cases}$$

Итак, получим МДНФ  $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2 x_3} \vee \overline{x_1 x_3} \vee x_1 x_2 x_3$

2. Минимизируйте методом Квайна - МакКласки булеву функцию  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , заданную таблицей истинности:

В СДНФ функции  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , заменим все наборы единицы их двоичными номерами:

$$f = 0001 \vee 0011 \vee 0101 \vee 0111 \vee 1110 \vee 1111.$$

Образуем группы двоичных номеров. Признаком образования  $i$ -й группы является  $i$  единиц в двоичном номере наборы единицы.

Номер группы	Двоичные номера наборов единицы
0	-
1	0001
2	0011, 0101
3	0111, 1110
4	1111

$x_4 x_3 x_2 x_1$	$f$
0000	0
0001	1
0010	0
0011	1
0100	0
0101	1
0110	0
0111	1
1000	0
1001	0
1010	0
1011	0
1100	0
1101	0
1110	1
1111	1

Склеим номера из соседних групп таблицы. Склеиваемые номера вычеркнем (выделено цветом). Результаты склеивания занесем в следующую таблицу.

Склеим номера из соседних групп. Склеиваться могут только номера, имеющие звездочки в одинаковых позициях. Склеиваемые номера вычеркнем. Результаты склеивания занесем в таблицу:

Номер группы	Двоичные номера наборов единицы
1	00*1, 0*01
2	0*11, 01*1
3	*111, 111*

Имеем три простые импликанты: \*111, 111\*, 0\*\*1. Строим импликантную матрицу. По таблице определяем совокупность простых им-

пликант -  $0^{**}1$  и  $111^*$ , соответствующую минимальной ДНФ. Для восстановления буквенного вида простой импликанты достаточно выписать произведения тех переменных, которые соответствуют сохранившимся двоичным цифрам.

Простые импликанты	Наборы единицы					
	0001	0011	0101	0111	1110	1111
$0^{**}1$	X	X	X	X		
$*111$				X		X
$111^*$					X	X

$0^{**}1 \longrightarrow \overline{x_1} x_4$ ;  $111^* \longrightarrow x_1 x_2 x_3$ .

Итак, МДНФ  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} x_4 \vee x_1 x_2 x_3$

### Задания для самостоятельного выполнения

6.1. Минимизируйте методом неопределенных коэффициентов логическую функцию  $f(x_1, x_2, x_3)$ , заданную наборами:

№	$f(x_1, x_2, x_3)$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0)	a) 0, 3, 5, 6	b) 0, 1, 3, 5, 7
1)	a) 0, 1, 3, 4	b) 0, 2, 3, 5, 6
2)	a) 0, 2, 3, 7	b) 0, 3, 4, 6, 7
3)	a) 1, 3, 4, 6	b) 1, 2, 4, 6, 7
4)	a) 1, 4, 5, 7	b) 1, 3, 5, 6, 7
5)	a) 1, 2, 4, 6	b) 1, 2, 3, 6, 7
6)	a) 1, 4, 6, 7	b) 1, 3, 4, 5, 7
7)	a) 2, 3, 5, 7	b) 2, 4, 5, 6, 7
8)	a) 2, 3, 4, 7	b) 2, 3, 5, 6, 7
9)	a) 2, 4, 5, 6	b) 2, 3, 4, 5, 6

6.2. Постройте методом неопределенных коэффициентов МДНФ функции  $f(x_1, x_2, x_3)$ , заданную таблицей:

Переменные			Варианты задания функции $f(x_1, x_2, x_3)$									
$X_1$	$X_2$	$X_3$	0)	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)
0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0

0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1

**6.3. Минимизируйте методом Квайна – Мак-Класки функцию  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , заданную таблицей:**

Варианты задания функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$									
0)	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1

## Тема 7. Применение алгебры логики

### **Применение логических функций для анализа и синтеза релейно-контактных схем**

В компьютерах и других автоматических устройствах широко применяются электрические схемы, содержащие сотни и тысячи переключательных элементов: реле, выключателей и т.п. Разработка таких схем весьма трудоёмкое дело. Оказалось, что для разработки и упрощения схем с успехом может быть использован аппарат алгебры логики.

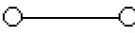
*Переключательной (релейно-контактной) схемой* считают участок электрической цепи, включающий ряд переключателей. Каждый




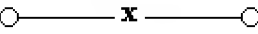
переключатель имеет только два состояния: замкнутое и разомкнутое. Переключателю поставим в соответствие логическую переменную  $x$ , которая принимает значение 1 (И) в том и только в том случае, когда переключатель замкнут и схема проводит ток; если же переключатель разомкнут, то значение  $x$  будет 0 (Л). Будем считать, что переменные  $x$  и  $\bar{x}$  связаны таким образом, что когда контакт  $x$  замкнут, то  $\bar{x}$  разомкнут, и наоборот.

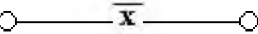
Всей переключательной схеме можно поставить в соответствие логическую переменную, равную И, если схема проводит ток, и равную Л - если не проводит. Эта переменная является функцией от переменных, соответствующих всем переключателям схемы, и называется *функцией проводимости*.

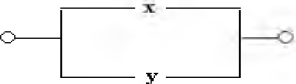
Найдем функции проводимости  $F$  некоторых переключательных схем:

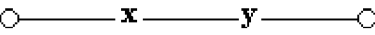
а)  - схема не содержит переключателей и проводит ток всегда, следовательно  $F = И$ ;

б)  - схема содержит один постоянно разомкнутый контакт, следовательно  $F = Л$ ;

в)  - схема проводит ток, когда переключатель  $x$  замкнут, и не проводит, когда  $x$  разомкнут, следовательно,  $F(x) = x$ ;

г)  - схема проводит ток, когда переключатель  $x$  разомкнут, и не проводит, когда  $x$  замкнут, следовательно,  $F(x) = \bar{x}$ ;

д)  - схема проводит ток, когда хотя бы один из переключателей замкнут (*параллельное соединение*), следовательно,  $F(x, y) = x \vee y$ .

е)  - схема проводит ток, когда оба переключателя замкнуты (*последовательное соединение*), следовательно,  $F(x, y) = x \& y$ ;

При рассмотрении переключательных схем возникают две основные задачи: синтез и анализ схемы.

*Синтез схемы* по заданным условиям ее работы сводится к:

1. составлению функции проводимости по таблице истинности, отражающей эти условия;
2. упрощению этой функции;

3. построению соответствующей схемы.

Анализ схемы сводится к:

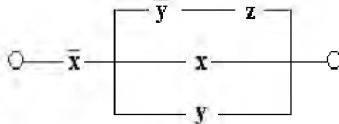
1. определению значений её функции проводимости при всех возможных наборах входящих в эту функцию переменных.
2. получению упрощённой формулы.

### Примеры выполнения заданий

1. Постройте релейно-контактные схемы с заданными функциями проводимости:

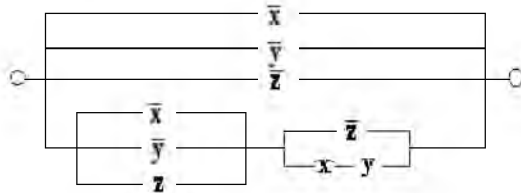
a)  $F(x, y, z) = \bar{x} (\bar{y} z \vee x \vee y)$ ;    b)  $G(x, y, z) = (x \rightarrow (y \rightarrow \bar{z})) \vee (xy \sim z)$ .

Решение: a) схема для  $F(x, y, z) = \bar{x} (\bar{y} z \vee x \vee y)$  имеет вид:

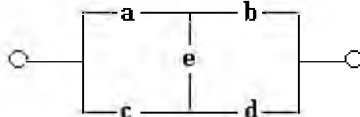


b) Выразим функцию  $G(x, y, z)$  через функции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания:  $x \rightarrow (y \rightarrow \bar{z}) \vee (xy \sim z) = \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee (xy \rightarrow z)(z \rightarrow xy) = \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{z} \vee xy)$ .

Схема для  $G(x, y, z) = \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{z} \vee xy)$  имеет вид:

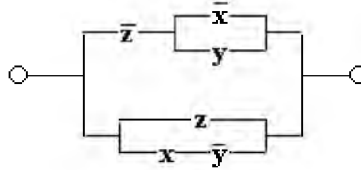


2. Требуется произвести анализ схемы:



Решение: имеется четыре возможных пути прохождения тока при замкнутых переключателях  $a, b, c, d, e$ : через переключатели  $a, b$ ; через переключатели  $a, e, d$ ; через переключатели  $c, d$  и через переключатели  $c, e, b$ . Функция проводимости имеет вид:  $F(a, b, c, d, e) = a \& b \vee a \& e \& d \vee c \& d \vee c \& e \& b$  или  $F(a, b, c, d, e) = a \& (b \vee e \& d) \vee c \& (d \vee e \& b)$ .

3. Требуется произвести анализ и, если возможно, упрощение схемы. Постройте упрощенную схему.



Решение: функция проводимости имеет вид:

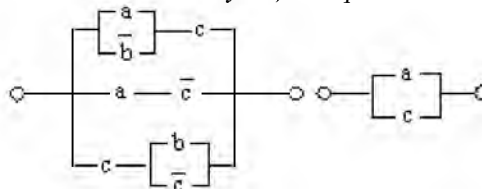
$$F(x, y, z) = \bar{z} \& (\bar{x} \vee y) \vee (z \vee x \& \bar{y}).$$

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= \bar{z} \& \bar{x} \vee \bar{z} \& y \vee z \vee x \& \bar{y} \equiv \\ &\equiv \bar{z} \& \bar{x} \vee (\bar{z} \vee z) \& (y \vee z) \vee x \& \bar{y} \equiv \\ &\equiv \bar{z} \& \bar{x} \vee I \& (y \vee z) \vee x \& \bar{y} \equiv \bar{z} \& \bar{x} \vee y \vee z \vee x \& \bar{y} \equiv \\ &\equiv \bar{z} \& \bar{x} \vee z \vee x \& \bar{y} \vee y \equiv (\bar{z} \vee z) \& (\bar{x} \vee z) \vee (x \vee y) \& (\bar{y} \vee y) \equiv \\ &\equiv I \& (\bar{x} \vee z) \vee (x \vee y) \& I \equiv \bar{x} \vee z \vee x \vee y \equiv I \vee y \vee z \equiv I \end{aligned}$$

Упрощенная схема имеет вид:



4. Проверьте равносильность следующих переключательных схем:



Функция проводимости имеет вид:

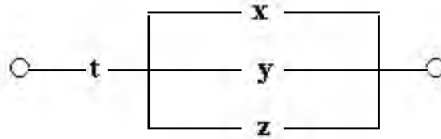
$$F(a, b, c) = (a \vee \bar{b}) \& c \vee a \& \bar{c} \vee c \& (b \vee \bar{c}).$$

$$\begin{aligned} F(a, b, c) &= a \& c \vee \bar{b} \& c \vee a \& \bar{c} \vee c \& b \vee c \& \bar{c} \equiv \\ &\equiv a \& (c \vee \bar{c}) \vee c \& (\bar{b} \vee b) \vee I \equiv a \& I \vee c \& I \equiv a \vee c \end{aligned}$$

Переключательные схемы равносильны.

5. Необходимо спроектировать (синтезировать) электрическую цепь, содержащую 4 переключателя  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $t$ , такую, чтобы она проводила ток тогда и только тогда, когда замкнут контакт переключателя  $t$  и какой-нибудь из остальных трёх контактов.

Функция имеет вид:  $F(x, y, z, t) = t \& (x \vee y \vee z)$ . Схема имеет вид:

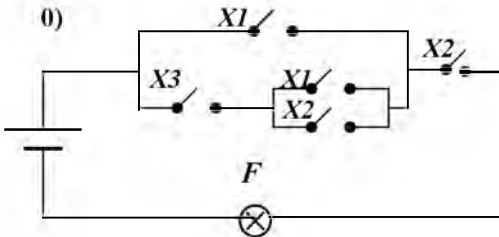


### Задания для самостоятельного выполнения

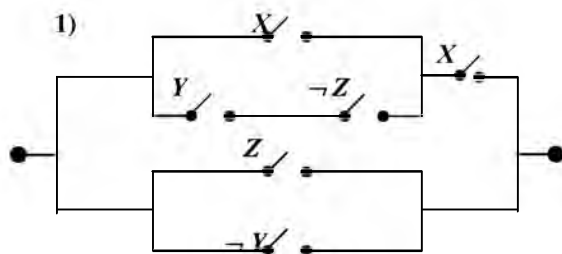
7.1. Постройте релейно-контактные схемы с заданными функциями проводимости:

- |  |  |
|--|--|
| 0) a) $(xy \vee \bar{z} \vee \bar{x})(\bar{x} \vee y)$ ;                             | b) $(xy \rightarrow \bar{x}y)(x \vee zy)$ ;                                  |
| 1) a) $(\bar{x} \vee y)(yz \vee x) \vee uz$ ;  | b) $(x \rightarrow y) \rightarrow \bar{x}(y \vee z)$ ;                       |
| 2) a) $x(yz \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \vee \bar{x}(\bar{y}z \vee y \vee \bar{z})$ ; | b) $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (y \rightarrow \bar{x})$ ; |
| 3) a) $(\bar{x} \vee y) t \bar{y} \bar{x}(y \vee z)$ ;                               | b) $(x / \bar{y}) \rightarrow (x \vee y) / (x \vee z)$ ;                     |
| 4) a) $x(yz \vee t) \vee xy \bar{z} \vee z(y \vee \bar{x})$ ;                        | b) $(z \downarrow xy)((x \vee \bar{z}) \downarrow yz)$ ;                     |
| 5) a) $\bar{x}(yz \vee x(ty \vee z(\bar{y} \vee x)))$ ;                              | b) $(x / (x \downarrow \bar{y})) / (\bar{x} \downarrow (y \vee \bar{z}))$ ;  |
| 6) a) $(x \vee yz)(xt \vee z(\bar{x} \vee y))$ ;                                     | b) $(x \oplus \bar{y}) \vee (x \oplus z)(\bar{y} \oplus \bar{z})$ ;          |
| 7) a) $x \bar{y} \vee u(v \vee z) \bar{x} \vee \bar{x}uv$ ;                          | b) $xy \oplus z \rightarrow \bar{x}z$ ;                                      |
| 8) a) $((z \vee x)u \bar{y} \vee \bar{x}v)xz$ ;                                      | b) $(\bar{x} \oplus \bar{y})(x \sim y)$ ;                                    |
| 9) a) $x(y \vee \bar{z}) \vee \bar{x} \vee (y \vee x \bar{z})x$ ;                    | b) $xy / (\bar{x} \rightarrow x(y \vee z))$ .                                |

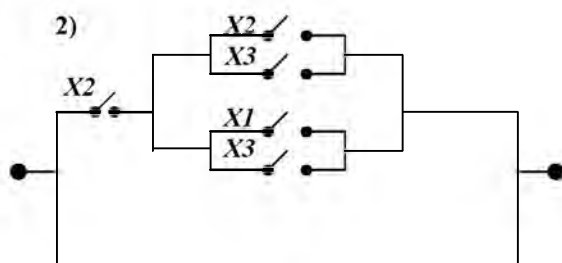
7.2. Требуется произвести анализ и, если возможно, упрощение переключательных схем, приведенных на следующих рисунках:



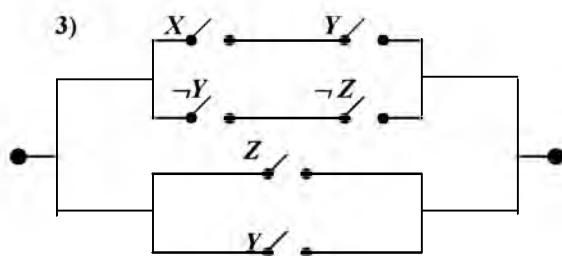
1)



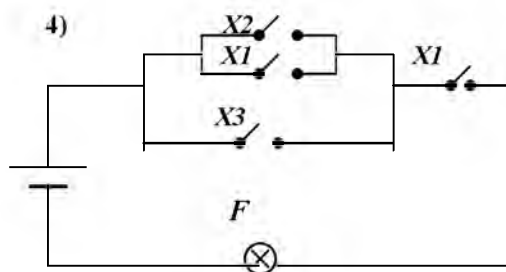
2)



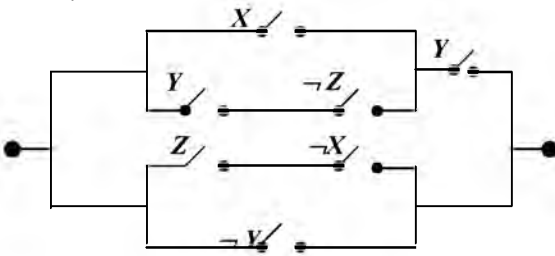
3)



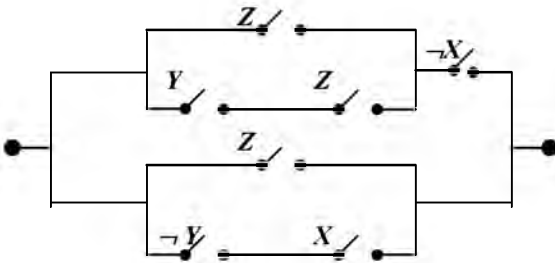
4)



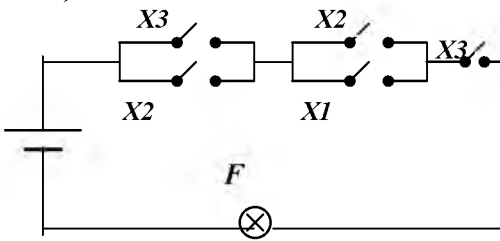
5)



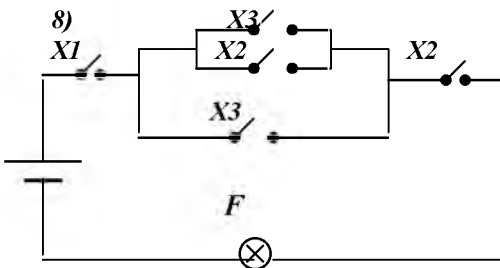
6)

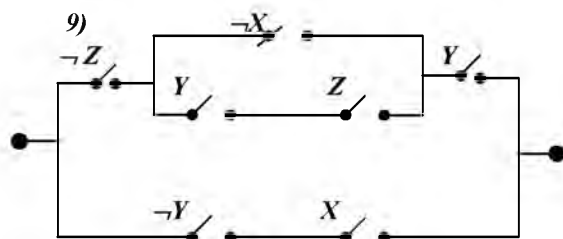


7)



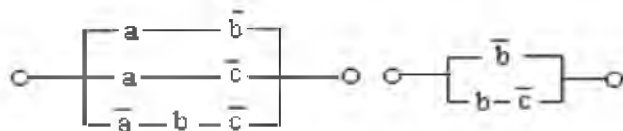
8)





7.3. Проверьте равносильность следующих переключательных схем:

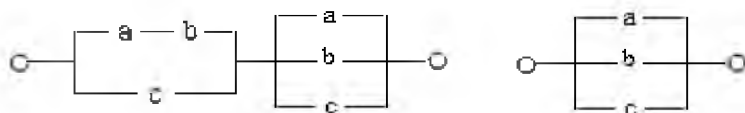
0)



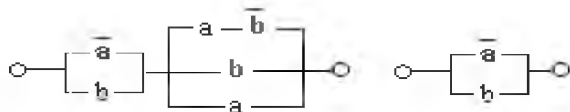
1)



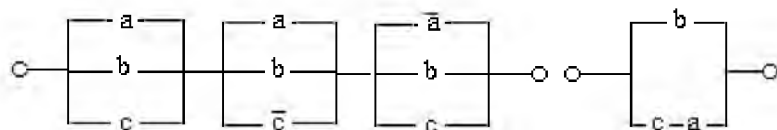
2)



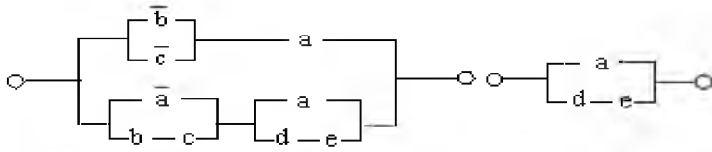
3)



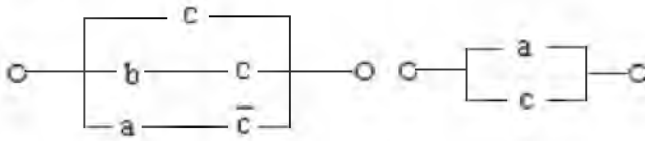
4)



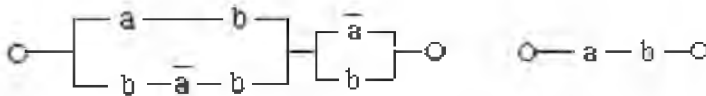
5)



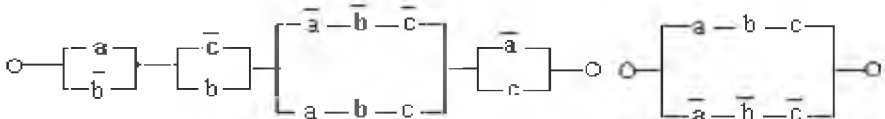
6)



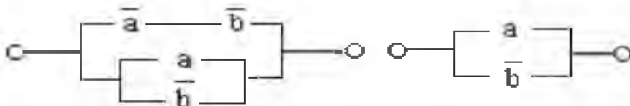
7)



8)



9)



7.4. Имеется одна лампочка в лестничном пролете двухэтажного дома. Постройте схему так, чтобы на каждом этаже своим выключателем можно было бы включать и выключать лампочку, независимо от положения другого выключателя.



### 7.5. Необходимо спроектировать электрическую цепь:

- 0) с 5-ю переключателями, которая проводит ток в том и только в том случае, когда замкнуты ровно 4 переключателя;
- 1) позволяющую включать и выключать электрическую лампочку с помощью 3 независимых переключателей;
- 2) с 4 переключателями, которая проводит ток тогда и только тогда, когда замыкаются некоторые, но не все переключатели;
- 3) с 5-ю переключателями, которая проводит ток в том и только в том случае, когда замкнуты ровно 2 или ровно 3 переключателя;
- 4) с 3 переключателями, которая замыкается тогда и только тогда, когда замкнуты либо ровно один, либо ровно 2 переключателя;
- 5) с 5-ю переключателями, которая проводит ток в тогла и только тогда, когда замкнуты все ее переключатели или когда не замкнут ни один из них;
- 6) чтобы в спортзале можно было включать и выключать свет при помощи любого из 3-х выключателей;
- 7) позволяющую включать и выключать электрическую лампочку с помощью 4 независимых переключателей;
- 8) с 5-ю переключателями, каждый из которых позволял бы включать и выключать в любой момент одну и ту же лампочку;
- 9) которая замыкается тогда и только тогда, когда либо переключатель x замкнут, либо переключатель y замкнут, либо переключатель z разомкнут.

### 7.6. Постройте релейно-контактные схемы по заданным условиям работы:

- 0)  $\pi(0,0,1,1) = \pi(1,1,1,0) = \pi(0,1,1,0) = 1$ ;
- 1)  $\pi(0,0,0) = \pi(1,1,0) = \pi(1,0,0) = 1$ ;
- 2)  $\pi(0,0,0) = \pi(0,1,0) = \pi(1,0,0) = \pi(0,1,1) = 1$ ;
- 3)  $\pi(1,0,0,0) = \pi(1,1,0,0) = \pi(1,0,0,1) = \pi(1,1,0,1) = \pi(0,1,0,1) = 1$ ;
- 4)  $\pi(0,0,1,1) = \pi(0,0,0,1) = \pi(1,0,0,1) = 1$ ;
- 5)  $\pi(1,1,1,1) = \pi(0,1,0,1) = 1$ ;
- 6)  $\pi(0,1,1) = \pi(0,1,0) = \pi(1,0,1) = 1$ ;
- 7)  $\pi(1,1,0) = \pi(1,0,0) = \pi(0,1,0) = 1$ ;
- 8)  $\pi(0,0,0,1) = \pi(1,0,0,1) = \pi(0,0,1,1) = \pi(1,0,1,1) = 1$ ;
- 9)  $\pi(0,0,0) = \pi(1,0,1) = 1$ .

**Контрольные вопросы  
на тему: «Логические основы информатики»**

<b>А</b>	Как построить функциональную схему?
<b>Б</b>	Какими свойствами обладают операции импликации и эквиваленции?
<b>В</b>	Как можно построить полином Жегалкина?
<b>Г</b>	Что такое алгебра логики? Что такое логическая формула?
<b>Д</b>	Какие формы представления логической функции Вы знаете?
<b>Е</b>	Что такое функция проводимости?
<b>Ё</b>	Что является предметом исследования алгебры логики?
<b>Ж</b>	Какие логические операции Вы знаете? Укажите их приоритет
<b>З</b>	Какие основные законы выполняются в алгебре логики?
<b>И</b>	Какими свойствами обладают логические константы?
<b>Й</b>	Почему законы алгебры логики только для операций: $\&$ , $\vee$ и $\neg$ ?
<b>К</b>	Какие методы построения МДНФ Вы знаете? Что такое импликанты?
<b>Л</b>	Как определяются существенные и фиктивные переменные?
<b>М</b>	Что такое суперпозиция логических функций?
<b>Н</b>	Какие законы алгебры логики справедливы и в математике?
<b>О</b>	Как определить, монотонна ли логическая функция?
<b>П</b>	Как построить СДНФ и СКНФ функции?
<b>Р</b>	Что Вы знаете о полиноме Жегалкина?
<b>С</b>	Что Вы знаете о полноте системы логических функций?
<b>Т</b>	Как построить таблицу истинности логической функции?
<b>У</b>	Какие Вы знаете комбинационные схемы?
<b>Ф</b>	Что Вы знаете о логических функциях? Какие они бывают?
<b>Х</b>	Для чего строится МДНФ логической функции?
<b>Ц</b>	Какими свойствами обладают операции дизъюнкции и конъюнкции?
<b>Ч</b>	В каком виде может представляться логическая функция?
<b>Ш</b>	Какие замкнутые классы определил Пост?
<b>Щ</b>	Как определить, самодвойственна ли логическая функция?
<b>Ъ</b>	Какие равносильности алгебры логики Вы знаете?
<b>Ы</b>	Как соотносятся СДНФ и СКНФ логической функции?
<b>Ь</b>	Что такое высказывание? Какие виды высказываний Вы знаете?
<b>Э</b>	Как задаются и обозначаются логические операции?
<b>Ю</b>	Как определить, линейна ли логическая функция?
<b>Я</b>	Какими свойствами обладает операция строгой дизъюнкции?

10 вопросов для контрольного опроса выбираются по буквам фамилии, имени, отчества в именительном падеже слева направо без повторения.

Таблица кодов ASCII

Неотображаемые символы				Отображаемые символы					
Название	Упр. симв.	Сим- вол	Hex	Сим- вол	Hex	Сим- вол	Hex	Сим - вол	Hex
Нуль	^@	<b>NUL</b>	00	<b>SP</b>	20	<b>@</b>	40	<b>'</b>	60
Начало заголовка	^A	<b>SOH</b>	01	<b>!</b>	21	<b>A</b>	41	<b>a</b>	61
Начало текста	^B	<b>STX</b>	02	<b>“</b>	22	<b>B</b>	42	<b>b</b>	62
Конец текста	^C	<b>ETX</b>	03	<b>#</b>	23	<b>C</b>	43	<b>c</b>	63
Конец передачи	^D	<b>EOT</b>	04	<b>\$</b>	24	<b>D</b>	44	<b>d</b>	64
Запрос	^E	<b>ENQ</b>	05	<b>%</b>	25	<b>E</b>	45	<b>e</b>	65
Подтверждение	^F	<b>ACK</b>	06	<b>&amp;</b>	26	<b>F</b>	46	<b>f</b>	66
Звонок	^G	<b>BEL</b>	07	<b>'</b>	27	<b>G</b>	47	<b>g</b>	67
Шаг назад	^H	<b>BS</b>	08	<b>(</b>	28	<b>H</b>	48	<b>h</b>	68
Гориз. табуляция	^I	<b>HT</b>	09	<b>)</b>	29	<b>I</b>	49	<b>i</b>	69
Перевод строки	^J	<b>LF</b>	0A	<b>*</b>	2A	<b>J</b>	4A	<b>J</b>	6A
Вертик. табуляция	^K	<b>VT</b>	0B	<b>+</b>	2B	<b>K</b>	4B	<b>k</b>	6B
Перевод стр-цы	^L	<b>FF</b>	0C	<b>,</b>	2C	<b>L</b>	4C	<b>l</b>	6C
Возврат каретки	^M	<b>CR</b>	0D	<b>-</b>	2D	<b>M</b>	4D	<b>m</b>	6D
Нижний регистр	^N	<b>SO</b>	0E	<b>.</b>	2E	<b>N</b>	4E	<b>n</b>	6E
Верхний регистр	^O	<b>SI</b>	0F	<b>/</b>	2F	<b>O</b>	4F	<b>o</b>	6F
Завершен. связи	^P	<b>DLE</b>	10	<b>0</b>	30	<b>P</b>	50	<b>p</b>	70
Упр. устр-вом 1	^Q	<b>DC1</b>	11	<b>1</b>	31	<b>Q</b>	51	<b>q</b>	71
Упр. устр-вом 2	^R	<b>DC2</b>	12	<b>2</b>	32	<b>R</b>	52	<b>r</b>	72
Упр. устр-вом 3	^S	<b>DC3</b>	13	<b>3</b>	33	<b>S</b>	53	<b>s</b>	73
Упр. устр-вом 4	^T	<b>DC4</b>	14	<b>4</b>	34	<b>T</b>	54	<b>t</b>	74
Ошибка передачи	^U	<b>NAK</b>	15	<b>5</b>	35	<b>U</b>	55	<b>u</b>	75
Хол. синхрониз.	^V	<b>SYN</b>	16	<b>6</b>	36	<b>V</b>	56	<b>v</b>	76
Конец пер. блока	^W	<b>ETB</b>	17	<b>7</b>	37	<b>W</b>	57	<b>w</b>	77
Отмена	^X	<b>CAN</b>	18	<b>8</b>	38	<b>X</b>	58	<b>x</b>	78
Конец носителя	^Y	<b>EM</b>	19	<b>9</b>	39	<b>Y</b>	59	<b>y</b>	79
Подстановка	^Z	<b>SUB</b>	1A	<b>:</b>	3A	<b>Z</b>	5A	<b>z</b>	7A
Выход	^[	<b>ESC</b>	1B	<b>;</b>	3B	<b>[</b>	5B	<b>{</b>	7B
Раздел. файлов	^\ ^	<b>FS</b>	1C	<b>&lt;</b>	3C	<b>\</b>	5C	<b> </b>	7C
Разделение групп	^] ^	<b>GS</b>	1D	<b>=</b>	3D	<b>]</b>	5D	<b>}</b>	7D
Раздел., записей	^^	<b>RS</b>	1E	<b>&gt;</b>	3E	<b>^</b>	5E	<b>~</b>	7E
Раздел. элемент.	^_ ^	<b>US</b>	1F	<b>?</b>	3F	<b>_</b>	5F	<b>DEL</b>	7F

**Альтернативная таблица  
(вторая половина кодовой таблицы)<sup>3</sup>**

Сим- вол	Дес	Сим- вол	Дес	Сим- вол	Дес	Сим- вол	Дес	Сим- вол	Дес
<b>А</b>	128	<b>Р</b>	144	<b>а</b>	160	<b>р</b>	224	<b>ё</b>	240
<b>Б</b>	129	<b>С</b>	145	<b>б</b>	161	<b>с</b>	225	<b>ё</b>	241
<b>В</b>	130	<b>Т</b>	146	<b>в</b>	162	<b>т</b>	226	<b>ё</b>	242
<b>Г</b>	131	<b>У</b>	147	<b>г</b>	163	<b>у</b>	227	<b>ё</b>	243
<b>Д</b>	132	<b>Ф</b>	148	<b>д</b>	164	<b>ф</b>	228	<b>ё</b>	244
<b>Е</b>	133	<b>Х</b>	149	<b>е</b>	165	<b>х</b>	229	<b>ё</b>	245
<b>Ж</b>	134	<b>Ц</b>	150	<b>ж</b>	166	<b>ц</b>	230	<b>ё</b>	246
<b>З</b>	135	<b>Ч</b>	151	<b>з</b>	167	<b>ч</b>	231	<b>ё</b>	247
<b>И</b>	136	<b>Ш</b>	152	<b>и</b>	168	<b>ш</b>	232	°	248
<b>Й</b>	137	<b>Щ</b>	153	<b>й</b>	169	<b>щ</b>	233	♦	249
<b>К</b>	138	<b>Ъ</b>	154	<b>к</b>	170	<b>ъ</b>	234	•	250
<b>Л</b>	139	<b>Ы</b>	155	<b>л</b>	171	<b>ы</b>	235	√	251
<b>М</b>	140	<b>Ь</b>	156	<b>м</b>	172	<b>ь</b>	236	№	252
<b>Н</b>	141	<b>Э</b>	157	<b>н</b>	173	<b>э</b>	237		253
<b>О</b>	142	<b>Ю</b>	158	<b>о</b>	174	<b>ю</b>	238		254
<b>П</b>	143	<b>Я</b>	159	<b>п</b>	175	<b>я</b>	239		255

<sup>3</sup> Альтернативная таблица приводится в сокращении (исключены символы псевдографики, которые не используются в изучаемых курсах).

## Рекомендуемая литература

1. Андреева Е.В, Босова Л.П, Фалина И.Н. Математические основы информатики. - М.: Бином. Лаборатория знаний, 2005.
2. Галушкина Ю.И. Конспект лекций по дискретной математике. – М.: Айрис-пресс, 2008
3. Дмитриев В.И. Прикладная теория информации. - М., 1989.
4. Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: учеб. пособие для высш. учеб. заведений. – М.: Издательский центр «Академия», 2006
5. Информатика. Задачник-практикум в 2-х т.т./Под ред. И.Г. Семакина, Е.К. Хеннера. Том 1. - М.: Лаборатория базовых знаний, 1999.
6. Карпов В.Г., Мощенский В.А. Математическая логика и дискретная математика. – Минск: «Вышэйш. школа», 1977
7. Клини С. Математическая логика. - М.: Мир, 1980.
8. Коган И.М. Прикладная теория информации. - М.: Радио и связь, 1981.
9. Колесников Н.Г. Математические и логические основы информатики. Краснодар: КубГАУ, 2000
10. Кузьмин И.В., Кедрус В.А. Основы теории информации и кодирования. - Киев, Вища школа, 1986.
11. Кук Д., Бейз Г. "Компьютерная математика", М, Наука, 1990г.
12. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М., 1970
13. Лапшева Е.Е. Машинная арифметика Элективный предпрофильный курс по информатике. - Саратов: 2006
14. Лихтарников Л.М, Сукачева Т.Г. Математическая логика. - СПб: Изд-во «Лань», 1998
15. Симонович С.В. Информатика: Базовый курс - СПб: Питер, 2001
- 25 Тишин В. В. Дискретная математика в примерах и задачах. - СПб.: БХВ-Петербург, 2008.
16. Турецкий В.Я. Математика и информатика. - 3-е изд. - М.: ИНФРА-М, 2000.

